IF107 - Bon ordre, ensemble bien ordonné

Frédéric Herbreteau
frederic.herbreteau@bordeaux-inp.fr

14 novembre 2024

1. Principe du bon ordre

Principe du bon ordre

Théorème

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ *admet un élément minimal*

Exemple

- $\{0, 1, 2, 3\}$
- ensemble des entiers naturels impairs : $\{1, 3, 5, \dots\}$
- faux dans $\mathbb{Z}$: $\{0, -1, -2, -3, \dots\}$
- faux dans $\mathbb{Q}$: $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\}$
- faux dans $\mathbb{R}$: $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{5}, \dots\right\}$

Preuve du principe du bon ordre (1/2)

Théorème

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un élément minimal

Démonstration.

On prouve la propriété $P(n)$: "tout sous-ensemble de n entiers naturels admet un élément minimal" par induction sur $n \geq 1$.

(Base) $P(1)$ est vraie car l'unique élément est minimal.

(Induction) Soit $n \geq 1$ un entier naturel quelconque, et supposons que $P(n)$ est vraie.
Soit E un ensemble de $n+1$ entiers naturels, et x un élément quelconque de E.
Alors, $F = E \setminus \{x\}$ est un ensemble de $n \geq 1$ entiers naturels qui admet un élément minimal y par H.I.
E admet donc un élément minimal : x si $x < y$, et y sinon, donc $P(n+1)$ est vraie.

Par le principe d'induction, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$. $\square$

Exemple

Pourquoi cette "preuve" n'est-elle pas correcte ?

Preuve du principe du bon ordre (2/2)

Théorème

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ *admet un élément minimal*

Démonstration.

Exemple de preuve par principe du bon ordre

Exemple

"Toute fraction $\frac{a}{b}$ peut s'écrire sous forme **irréductible**"

Méthodologie

Afin de prouver qu'un prédicat $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ selon le **principe du bon ordre** :

1. procéder par contradiction en supposant que $P(n)$ est faux pour certaines valeurs de n
2. définir l'ensemble $C = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ est faux}\}$ des contre-exemples
3. C est **non-vide**, donc par le principe du bon ordre, C possède un **élément minimal** n_0.
4. parvenir à une contradiction :
   - soit en montrant que $P(n_0)$ est vrai,
   - soit en montrant que C contient un élément plus petit que n_0,
   - ...
5. en déduire que C est nécessairement vide.
6. conclure que $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exemple d'application de la méthdologie

Exemple

Mq $P(n)$: "$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$" est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

Lien entre induction et bon ordre

Toute preuve par induction peut être reformulée en utilisant le principe du bon ordre, et inversement

- d'une part : preuve par induction du "principe du bon ordre" (cf. pages précédentes)

- d'autre part : prouvons le principe d'induction à l'aide du principe du bon ordre

Lemme

Pour tout prédicat $P(n)$ sur les entiers naturels, si $P(0)$ est vrai, et si $P(n) \implies P(n+1)$, alors $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

$\square$

Exemple

Mq $P(n)$: "$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$" est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. Ensembles bien ordonnés

Ensembles bien ordonnés

Définition

Un ensemble ordonné $(E, \preccurlyeq)$ est **bien ordonné** si toute partie non-vide de E admet un élément minimal pour $\preccurlyeq$.

Exemple

- $(\mathbb{N}, \leq)$ est bien ordonné (principe du bon ordre)
- $(\{a, b\}^*, \sqsubseteq)$ est bien ordonné, où $u \sqsubseteq v$ si u s'obtient en retirant des lettres dans v
- $(\mathbb{Q}, \leq)$ n'est **pas** bien ordonné

Lemme

Tout sous-ensemble d'un ensemble bien ordonné, est bien ordonné

Généralisation

Théorème (Zermelo, 1904)

Tout ensemble peut être muni d'une structure de bon ordre, c'est-à-dire d'un ordre tel que toute partie non vide admette un plus petit élément

Remarque : on ne sait pas expliciter ce bon ordre pour la plupart des ensembles (ex : $\mathbb{R}$)

Exemple

On définit la relation d'ordre $\preceq$ sur $\mathbb{Z}$ par : $m \preceq n$ si :

- $m = n$
- ou $|m| < |n|$
- ou $|m| = |n|$ et $m < 0$ et $n > 0$

On a : $0 \preceq -1 \preceq 1 \preceq -2 \preceq 2 \preceq \cdots$

Bon ordre et suites décroissantes

Théorème

Toute suite strictement décroissante dans un ensemble bien ordonné est nécessairement finie.

Démonstration.

$\square$

Exemple

- la suite $u_{n+1} = u_n - 2$ si $u_n \geq 2$ est strictement décroissante dans $(\mathbb{N}, \leq)$, donc finie pour toute valeur $u_0 \in \mathbb{N}$.
- la suite $v_{n+1} = \begin{cases} -v_n & \text{si } v_n > 0 \\ -v_n - 1 & \text{si } v_n < 0 \end{cases}$
  est strictement décroissante dans $(\mathbb{Z}, \preceq)$, donc finie pour toute valeur $v_0 \in \mathbb{Z}$.

3. Bon ordre et types récursifs

Type récursif et ordre induit

Soit $T = (B, K)$ la définition récursive d'un ensemble X_T.

Exemple

Base : $\langle\rangle$ est la liste vide

Constructeur : pour toute liste l et tout entier n, $\langle n, l\rangle$ est une liste

Définition

Soit x_1 et x_2 deux éléments de X_T, on définit $x_1 \leq_T x_2$ si x_1 apparaît dans la construction de x_2

Exemple

$$\langle\rangle \leq_{liste} \underbrace{\langle 1\rangle}_{\langle 1,\langle\rangle\rangle} \leq_{liste} \underbrace{\langle 0,1\rangle}_{\langle 0,\langle 1,\langle\rangle\rangle\rangle} \text{ mais } \underbrace{\langle 0\rangle}_{\langle 0,\langle\rangle\rangle} \not\leq_{liste} \underbrace{\langle 0,1\rangle}_{\langle 0,\langle 1,\langle\rangle\rangle\rangle}$$

Types récursifs et éléments minimaux

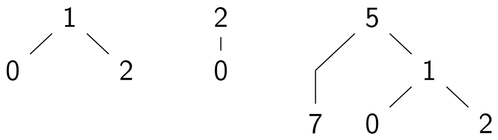
Exemple (liste chaînée)

$l \leq_{liste} l'$ si l est un suffixe de l'

- éléments minimaux de : $\{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 0, 1, 2\rangle\}$?
- suite strictement décroissante depuis $\langle 0, 1, 2, 3, 4\rangle$?

Exemple (arbre binaire)

$a \leq_{tree} a'$ si a est un sous-arbre de a'



- arbres minimaux ci-dessus ?
- suite strictement décroissante à partir de l'arbre de droite ?

Type inductif et bon ordre

Théorème

Pour toute définition récursive $T = (B, K)$*, l'ensemble* $(X_T, \leq_T)$ *est bien ordonné*

Démonstration.

$\square$

Exemple

$(liste, \leq_{liste})$ et $(arbre, \leq_{arbre})$ sont bien ordonnés.

Corollaire

Toute suite strictement décroissante dans $(X_T, \leq_T)$ *est nécessairement finie*