Introduction à la logique des prédicats

(Logique et preuve)

Frédéric Herbreteau
frederic.herbreteau@bordeaux-inp.fr

27 octobre 2025

1. Prédicats, quantificateurs et formules

Prédicats

Définition

Un **prédicat** est une proposition dont la véracité dépend d'une ou plusieurs variables

Exemple

- "$5x^2 - 7 = 0$" est vrai **pour certaines** valeurs : $x = \pm\sqrt{\frac{7}{5}}$
- "$x^2 \geq 0$" est vrai **pour toute** valeur de $x \in \mathbb{R}$
- "$P(x, y)$" est un prédicat **abstrait** dont la valeur dépend de x et y

Quantificateurs

Nous avons besoin de **quantifier** les valeurs des variables pour lesquelles un prédicat est vrai

Exemple

“si vous pouvez résoudre **n’importe quel** exercice de TD, alors vous aurez 20/20”

- “si vous pouvez résoudre **au moins un** exercice ...” ?
- “si vous pouvez résoudre **tous les** exercices ...” ?

Deux **quantificateurs** : “il existe” ($\exists$) et “pour tout” ($\forall$)

Exemple

- “$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$” est une formule vraie
- “$\exists x \in \mathbb{R}, 5x^2 - 7 = 0$” est vraie pour $x = \sqrt{\frac{7}{5}}$ notamment

Formules

On considère des prédicats :

- **usuels** $x^2 \geq 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad 5y - 3x = 6 \ldots$
- **abstraits** $P(x), \quad Q(x, y), \ldots$

Définition

Les **formules** de la logique des prédicats sont définies par :

- tout **prédicat** est une formule
- la **combinaison de deux formules** F et G est une formule : $\neg F$, $F \wedge G$, $F \vee G$, $F \implies G$ et $F \iff G$
- la **quantification d'une variable** dans une formule F est une formule : $\forall x \in D, F$ et $\exists x \in D, F$ pour un ensemble D

Exemple

$\exists p, q \in \text{Premiers}, \forall n \in \text{Pairs}, (n > 2 \implies n = p + q)$

Combiner les quantificateurs

Il est souvent nécessaire de **combiner plusieurs quantificateurs**

Exemple (Conjecture de Goldbach)

"tout entier pair $n > 2$ est la somme de deux nombres premiers"

$$\forall n \in \text{Pairs}, (n > 2 \implies \exists p, q \in \text{Premiers}, n = p + q)$$

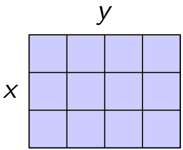
L'**ordre des quantificateurs** est significatif

Exemple

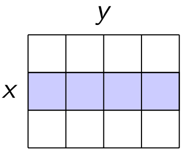
La formule ci-dessous est-elle équivalente à la formule ci-dessus ?

$$\exists p, q \in \text{Premiers}, \forall n \in \text{Pairs}, (n > 2 \implies n = p + q)$$

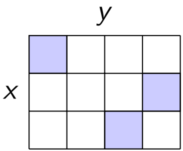
Ordre des quantificateurs



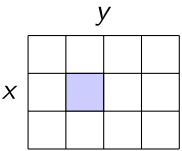
$\forall x \, \forall y$



$\exists x \, \forall y$



$\forall x \, \exists y$



$\exists x \, \exists y$

Propriétés des quantificateurs

Priorité : de la plus haute (gauche) à la plus basse (droite)

$$\forall/\exists \qquad \neg \qquad \wedge \qquad \vee \qquad \implies \qquad \iff$$

Exemple

Parenthéser la formule en respectant la priorité des connecteurs :

$$\forall n \in \text{Pairs}, n > 2 \implies \exists p, q \in \text{Premiers}, n = p + q$$

Comparer avec la formule du #6.

Domaine vide :

- "$\exists x \in \emptyset, F$" est fausse, peu importe F
- "$\forall x \in \emptyset, F$" est vraie, indépendamment de F

Modéliser en logique des prédicats

Exemple

Soit :

- P un ensemble de personnes
- et $parent(x, y)$ un prédicat vrai si x est le parent de y

Exprimer les prédicats suivants par des formules de logique :

- "x est le frère ou la sœur de y"
- "x est un grand-parent de y"
- "x est une cousine ou un cousin de y"
- "x n'a pas d'enfant"

2. Valeur de vérité et équivalence logique

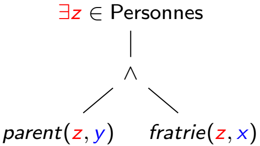
Variable libre/liée

Définition
Une occurrence d'une variable est **liée** si elle est sous la portée d'un quantificateur. Elle est **libre** sinon.

Exemple

"x est une tante ou un oncle de y"

$\exists z \in \text{Personnes}, (parent(z, y) \wedge fratrie(z, x))$



- La véracité de la formule **dépend de la valeur** des variables libres : $oncle\_tante(x, y)$
- Une formule est **close** si toutes ses variables sont liées

Modèle

Définition

Un **modèle** (ou interprétation) définit :

- le **domaine** des variables (peut être infini)
- la **valeur** de chaque variable **libre**
- une **relation** pour chaque prédicat
- une **fonction** pour chaque symbole de fonction

Exemple

"x est une tante ou un oncle de y"

$$\exists z \in \text{Personnes}, (\mathit{parent}(z, y) \wedge \mathit{fratrie}(z, x))$$

- Personnes $= \{A, B, C, D\}$
- $y \mapsto D$ et $x \mapsto C$
- $\mathit{parent} = \{(A, B), (A, C), (B, D)\}$
- $\mathit{fratrie} = \{(B, C)\}$ (défini depuis *parent*, cf. #9)

Valeur de vérité d'une formule

Définition

La valeur d'une formule dans un modèle M est définie par :

- "$\exists x \in D, F$" est vraie si F est vraie dans le modèle $M[x \mapsto v]$ pour au moins une valeur $v \in D$
- "$\forall x \in D, F$" est vraie si F est vrai dans le modèle $M[x \mapsto v]$ pour toute valeur $v \in D$
- Un prédicat "$P(x_1, \ldots, x_n)$" est vrai si $(M(x_1), \ldots, M(x_n))$ est dans la relation $M(P)$
- $\neg F$, $F \wedge G$, $F \vee G$, $F \implies G$ et $F \iff G$ comme dans le cas propositionnel

Exemple

La formule ci-dessous est vraie dans le modèle du #12.

$$\exists z \in \text{Personnes}, (\mathit{parent}(z, y) \wedge \mathit{fratrie}(z, x))$$

Équivalence logique

Définition

Deux formules sont **logiquement équivalentes** si elles ont la même valeur pour tout modèle

Négation :

- "$\neg(\forall x, F)$" est équivalente à "$\exists x, \neg F$"
- "$\neg(\exists x, F)$" est équivalente à "$\forall x, \neg F$"

Commutativité :

- "$\forall x,\ \forall y,\ F$" est équivalent à "$\forall y,\ \forall x,\ F$"
- "$\exists x,\ \exists y,\ F$" est équivalent à "$\exists y,\ \exists x,\ F$"

Distributivité :

- $\exists x, (F \wedge G)$ implique $(\exists x, F) \wedge (\exists x, G)$
- $\forall x(F \wedge G)$ est équivalente à $(\forall x, F) \wedge (\forall x, G)$
- $\exists x, (F \vee G)$ est équivalente à $(\exists x, F) \vee (\exists x, G)$
- $(\forall x, F) \vee (\forall x, G)$ implique $\forall x,\ (F \vee G)$

Forme normale négative

Définition

Une formule de la logique des prédicats est en **forme normale négative (FNN)** si elle n'utilise que $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$ et $\neg$ sur les litéraux.

Exemple

FNN ou pas ?

- $P(x) \implies \neg P(a)$
- $\forall x, P(x) \vee (\neg Q(a) \wedge P(b))$
- $\exists x, \neg(\forall y, P(x, y) \implies Q(x) \vee R(y, x))$

Théorème

Toute formule de la logique prédicats est logiquement équivalente à une formule en ***forme normale négative***

3. Satisfiabilité et validité

Satisfiabilité

Définition

Une formule est **satisfiable** si elle est vraie pour (au moins) un modèle

Exemple

"x est une tante ou un oncle de y"

$$\exists z \in \text{Personnes}, (\textit{parent}(z, y) \wedge \textit{fratrie}(z, x))$$

est satisfiable, puisqu'elle est vraie pour le modèle du #12

Théorème

*La satisfiabilité en logique des prédicat est **indécidable**.*

Validité

Définition

Une formule est **valide** si elle est vraie pour tout modèle.

Exemple

"x est une tante ou un oncle de y"

$$\exists z \in \text{Personnes}, (\mathit{parent}(z, y) \wedge \mathit{fratrie}(z, x))$$

n'est pas valide, car fausse pour tout modèle tq $\mathit{parent} = \emptyset$

NB : F est valide si et seulement si $\neg F$ est insatisfiable

Théorème

*La validité en logique des prédicats est **indécidable**.*

4. Preuve de validité par tableau

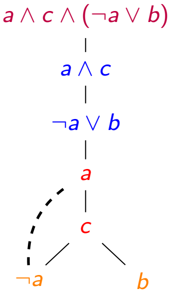
Tableau sémantique

Principe : pour une formule F

- construire un **arbre** (tableau) A sont les nœuds sont des formules, et de **racine** F
- tel que F est **logiquement équivalente** à la formule $(B_1 \vee \ldots \vee B_k)$ où B_i est la conjonction $(n_1 \wedge \ldots \wedge n_l)$ des formules de la $i^{\text{ème}}$ branche de A

Exemple

$a \wedge c \wedge (\neg a \vee b)$



$a \wedge c \wedge (\neg a \vee b) \equiv ((a \wedge c) \wedge (\neg a \vee b) \wedge a \wedge c \wedge \neg a) \vee ((a \wedge c) \wedge (\neg a \vee b) \wedge a \wedge c \wedge b)$

Règles de construction pour $\wedge$ et $\vee$

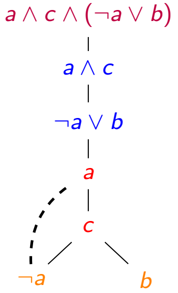
Construction de l'arbre A pour une formule F **en FNN et close** :

- la **racine** de A est F
- ajouter à **une feuille** n **de** A le sous-arbre produit par l'une des formules de la branche de n (cf. ci-dessous)
- **arc de clôture** entre deux littéraux opposés sur une branche

Ajouter sous la feuille n :

pour $G \wedge H$	**pour** $G \vee H$
$G \wedge H$ $\vdots$ n $\vert$ G $\vert$ H	$G \vee H$ $\vdots$ n $\swarrow \quad \searrow$ $G \qquad H$

Exemple



Tableaux clos

- Une branche est **close** si elle contient **un litéral et sa négation**
- Un tableau est **clos** si toutes ses branches sont closes

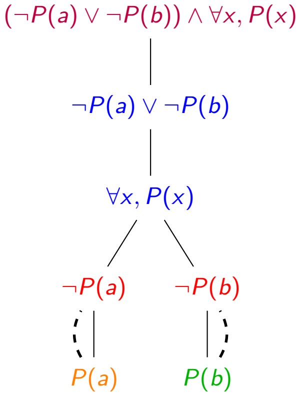
Exemple

Règles de construction pour $\exists$ et $\forall$

Rappel : formule en **FNN et close**

Ajouter sous une feuille n :

pour $\exists x, G$	**pour** $\forall x, G$
$\exists x, G$ $\vdots$ n $\vert$ $G[a/x]$	$\forall x, G$ $\vdots$ n $\vert$ $G[t/x]$



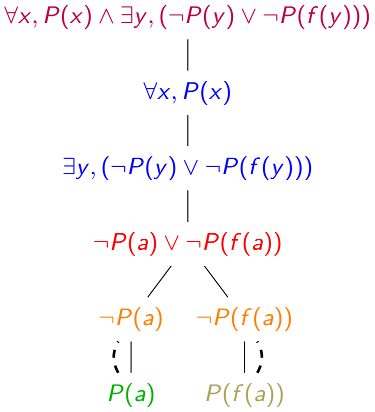
- a est une nouvelle constante
- t est un terme constant
- $G[e/x]$ subtitue e à toutes les **occurrences libres** de x dans G

Remarque : la règle $\forall$ peut être **appliquée plusieurs fois**

Exemple de tableau avec ∃ et ∀

pour $G \wedge H$	**pour** $G \vee H$
$G \wedge H$ $\vdots$ n $\mid$ G $\mid$ H	$G \vee H$ $\vdots$ n $G \qquad H$

pour $\exists x, G$	**pour** $\forall x, G$
$\exists x, G$ $\vdots$ n $\mid$ $G[a/x]$	$\forall x, G$ $\vdots$ n $\mid$ $G[t/x]$



Preuve de validité par tableau

Théorème

*Une formule F est **insatisfiable** si et seulement si elle admet un **tableau clos***

Si F admet un tableau clos :

- chaque branche B_i correspond à une formule insatisfiable $(\ldots \wedge l \wedge \ldots \wedge \neg l \wedge \ldots)$
- F est logiquement équivalente à $(B_1 \vee \ldots \vee B_k)$ qui est donc insatisfiable

Attention : un tableau non-clos **ne prouve pas la satisfiabilité**

Corollaire

*F est **valide** si et seulement si $\neg F$ admet un tableau clos*

NB : on peut toujours clore une formule F en quantifiant $\forall$ ses variables libres, tout en **préservant sa validité**