IF107 Logique et preuve - TD "Principe du bon ordre"
Département "Informatique", ENSEIRB-MATMECA 29 novembre 2024

Voir la page `https://thor.enseirb-matmeca.fr/sites/if107-main/` pour toute information complémentaire sur cet enseignement.

1 Ensembles bien ordonnés

Exercice 1
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à $-n$ est bien ordonné.

Exercice 2
Une *borne inférieure* pour un ensemble S de nombres réels, est un nombre réel l tel que $l \leq x$ pour tout $s \in S$.

Montrer que tout ensemble d'entiers, qui admet une borne inférieure, est bien ordonné.

Exercice 3
Soit $\mathbb{F}$ l'ensemble des fractions de la forme $\frac{n}{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{F} = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots \right\}$$

1. Montrer que $\mathbb{F}$ est bien ordonné (indication : l'élément minimal est celui qui a le plus petit numérateur)
2. On note $\mathbb{N} + \mathbb{F}$ l'ensemble des nombres $n + f$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathbb{F}$. Montrer que $\mathbb{N} + \mathbb{F}$ est bien ordonné.

2 Principe du bon ordre

Exercice 4
Dans cet exercice, nous allons utiliser le principe du bon ordre pour démontrer que pour tout entier positif n :

$$\sum_{i=0}^{n-1} (2i + 1) = n^2 \tag{1}$$

Supposons à l'inverse qu'il existe des entiers pour lequels l'égalité (1) est fausse. Soit m le plus petit de ces entiers.

1. Pourquoi existe-t-il un tel m ?
2. Expliquer pourquoi $m \geq 2$?
3. Pourquoi l'assertion précédente implique-t-elle :

$$\sum_{i=1}^{m-1} (2(i-1) + 1) = (m-1)^2 \tag{2}$$

4. Quel terme faut-il ajouter au membre gauche de l'égalité (2) pour que le résultat soit égal à :
$$\sum_{i=1}^{m}(2(i-1)+1)$$
5. Conclure que l'équation (1) est vraie pour tout entier n positif.

Exercice 5
La suite de Fibonacci est définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

On souhaite montrer que chaque terme de la suite de Fibonacci est pair. Indiquer quelle(s) étape(s) dans la "preuve" ci-dessous est/sont fausse(s).

1. soit $even(n)$ le prédicat "Le terme F_n de la suite de Fibonacci est pair"
2. soit C l'ensemble des contre-exemples à l'affirmation "$even(n)$ est vrai pour tout entier naturel n" :
$$C = \{n \in \mathbb{N} \,|\, even(n) \text{ est faux }\}$$
3. on montre que C est vide par contradiction. Supposons donc que C n'est pas vide
4. C est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$. Par le principe du bon ordre, il admet un élément minimal m.
5. alors $m \geq 1$ puisque F_0 est pair.
6. m étant le contre-exemple minimal, $even(k)$ est vrai pour tout $k < m$.
7. en particulier, F_{m-1} et F_{m-2} sont tous les deux pairs.
8. par définition, $F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$ est donc pair.
9. contradiction ; $even(m)$ est pair.
10. par conséquent, C est vide et $even(n)$ es vrai pour tout entier naturel n

Exercice 6
On vous donne un ensemble d'enveloppes contenant : 1, 2, 4, $\ldots$, 2^n euros. On définir la propriété suivante :

$P(n)$: "pour tout entier positif ou nul strictement inférieur à 2^{n+1}, il existe une sélection d'enveloppes dont la somme est égale à cet entier."

Prouver que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n en utilisant le principe du bon ordre (indication : distinguer le cas où la somme à décomposer est strictement inférieure à 2^n et celui où elle est supérieure ou égale à 2^n).