**IF107 Logique et preuve - TD ”Induction”**
Département “Informatique”, ENSEIRB-MATMECA 8 novembre 2024

Voir la page https://thor.enseirb-matmeca.fr/sites/if107-main/ pour toute information complémentaire sur cet enseignement.

# 1 Preuves par récurrence simples

**Exercice 1**

1. Montrer par induction que tout ensemble fini non vide de nombres réels possède un élément minimal.
2. Cette propriété est-elle vraie pour les ensembles infinis de nombres réels ?

**Exercice 2**
Un nombre entier $a$ divise un nombre entier $b$, noté $a|b$, si $b$ est un multiple de $a$ (il existe un entier $k$ tel que $b = k \cdot a$). Par exemple $3|(4^3 - 4)$ car $4^3 - 4 = 60$ est un multiple de 3.

Montrer par induction que “$3|(n^3 - n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$”

**Exercice 3**
La suite de Fibonacci est définie par :

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_0^2 + F_1^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1}$.

**Exercice 4**
Montrer par récurrence sur $n$ la loi de distribution de l'intersection sur une union de $n$ ensembles :

$$A \cap \left( \bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

# 2 Preuves par récurrence élaborées

**Exercice 5**
Lors de la construction du bâtiment de Bordeaux INP, il a été prévu de paver le patio et de placer une statue du directeur en son centre. La figure 1 (gauche) montre un patio constitué d'une grille de taille $2^n \times 2^n$. La statue peut être placée sur l'une des cases grisées. Pour des questions esthétiques, l'architecte du bâtiment a choisi de paver le patio avec des dalles en forme de “L” comme sur la figure 1 (droite). L'objectif est donc de paver la grille avec des tuiles en “L”, tout en laissant une *case vide* pour la statue.

1. Montrer un pavage pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ avec l'une des cases centrales vide.
2. Montrer par récurrence sur $n$ entier naturel, qu'il existe un pavage avec l'une des cases centrales vide, pour toute grille de taille $2^n \times 2^n$.

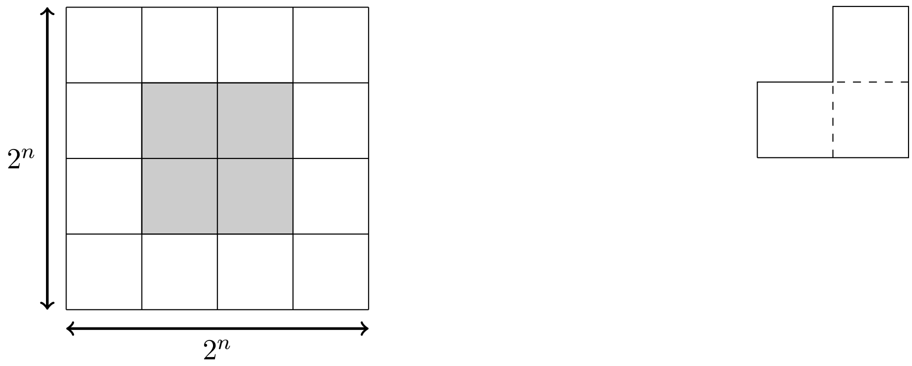


FIGURE 1 – Un patio de taille $2^n \times 2^n$ pour $n = 2$ avec les cases centrales en gris (à gauche), et une tuile en forme de "L" (à droite)

**Exercice 6**
Attention, les preuves par induction peuvent sembler simples, mais elles sont parfois piègeuses. Voici une "preuve fausse", à vous de trouver l'erreur.

$P(n)$ : "dans tout ensemble de $n$ chevaux, tous les chevaux ont la même couleur"
On prouve que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par induction sur $n$.

**Base :** $P(0)$ est vraie, puisque tous les chevaux d'un ensemble vide de chevaux ont la même couleur

**Induction :** Soit $k$ un entier naturel quelconque. Supposons que $P(k)$ est vraie. On considère un ensemble de $k + 1$ chevaux : $\{c_1, c_2, \ldots, c_k, c_{k+1}\}$. On prouve que $P(k + 1)$ est également vraie.

Considérons les $k$ premiers chevaux :

$$\underbrace{c_1, c_2, \ldots, c_k}_{\text{même couleur}}\, c_{k+1} \tag{1}$$

Par hypothèse d'induction, tous ces chevaux ont la même couleur.

Considérons maintenant les $k$ derniers chevaux :

$$c_1\, \underbrace{c_2, \ldots, c_k, c_{k+1}}_{\text{même couleur}} \tag{2}$$

Par hypothèse d'induction, tous ces chevaux ont la même couleur.

Ainsi donc, $c_1$ a la même couleur que $c_2, \ldots, c_k$ et donc également que $c_{k+1}$. On en déduit que $P(k + 1)$ est vraie.

**Exercice 7**
On considère une monnaie constituée de deux pièces, l'une de valeur 3 et l'autre de valeur 5. Certaines petites valeurs, comme 4 et 7 ne peuvent pas être payées avec ces pieces. Montrer par récurrence forte que toute somme d'une valeur supérieure ou égale à 8 peut être décomposée en somme de 3 et 5, en utilisant l'hypothèse d'induction :

$P(n)$ : "$n + 8$ peut être décomposée en en une somme de 3 et de 5"

**Exercice 8**
Le jeu débute avec une pile de $n$ boîtes. À chaque tour de jeu, on divise une pile de hauteur $n_1 + n_2$ en deux piles de hauteurs $n_1$ et $n_2$ telles que $n_1, n_2 \geq 1$. Cette division rapporte $n_1 n_2$ points. Le jeu s'arrête lorsque l'on a $n$ piles de hauteur 1. Le score est alors la somme des points obtenus à chaque division.

Démontrer par induction forte que le score final est $n(n-1)/2$ quelle que soit la stratégie utilisée.

## 3 Preuves par induction structurelle

**Exercice 9**
L'ensemble des listes d'entiers est récursivement définie par :

**Base :** $\langle\rangle$ est la liste vide

**Induction :** si $l$ est une liste et $n$ un entier, alors $\langle n, l\rangle$ est une liste

On définit l'inverse d'une liste comme étant la liste lue de droite à gauche : $rev(\langle a, \langle b, \langle c, \langle\rangle\rangle\rangle\rangle) = \langle c, \langle b, \langle a, \langle\rangle\rangle\rangle\rangle$ (c'est à dire $rev(abc) = cba$). On rappelle que $l_1 \cdot l_2$ est la concaténation de listes définie en cours.

1. Montrer par induction structurelle que pour toute liste $l$ : "$l = l \cdot \langle\rangle$".
2. Définir la fonction récursive $rev$ sur le type liste.
3. Prouver par induction structurelle que pour toutes listes $l_1$ et $l_2$, $rev(l_1 \cdot l_2) = rev(l_2) \cdot rev(l_1)$.

**Exercice 10**
L'ensemble des formules propositionnelles est défini par :

**Base :** toute variable propositionnelle $p$ est une formule

**Induction :** si $F$ et $G$ sont deux formules, alors $\neg F$, $F \wedge G$, $F \vee G$, $F \implies G$ et $F \iff G$ sont des formules.

Une valuation $v$ associe à chaque variable propositionnelle $p$ une valeur $v(p) \in \{0,1\}$. Étant donnée une valuation $v$, on note $v[x \mapsto c]$ la valuation qui donne la même valeur que $v$ à toutes les variables, sauf $x$ qui a la valeur $c$.

Soit $\mathbb{B} = \{0,1\}$ et les opérateurs définis par :
— $\overline{0} = 1$ et $\overline{1} = 0$
— $0 + 0 = 0$ et $0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 1$
— $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ et $1 \cdot 1 = 1$

1. Définir la fonction récursive $eval(F, v)$ qui calcule la valeur de la formule $F$ dans la valuation $v$.
2. Définir la fonction récursive $subst(F, x, G)$ qui substitue la formule $G$ à chaque occurrence de la variable $x$ dans la formule $F$
3. Montrer par induction structurelle que $eval(subst(F, x, G), v) = eval(F, v[x \mapsto eval(G, v)])$, c'est à dire que la valeur de $F$ dans laquelle on substitue $G$ aux occurrences de $x$, est égale à la valeur de $F$ évaluée en prenant la valeur de $G$ pour $x$

**Exercice 11**
On défini l'ensemble des arbres binaires par :

**Base :** `Empty` est un arbre binaire

**Induction :** si $g$, $d$ sont des arbres binaires et $n$ est un entier, alors $\texttt{Node}(n, g, d)$ est un arbre binaire

1. Définir la fonction récursive $nnodes$ qui calcule le nombre de nœuds d'un arbre binaire
2. Définir la fonction récursive $nvides$ qui calcule le nombre de `Empty` dans un arbre binaire
3. Prouver par induction structurelle que pour tout arbre binaire $a$, $nvides(a) = nnodes(a) + 1$
4. Définir la fonction récursive $height$ qui calcule la hauteur d'un arbre binaire (la longueur de sa plus longue branche)
5. Prouver par induction structurelle que pour tout arbre binaire $a$, $nnodes(a) \leq 2^{height(a)} - 1$