IF107 Logique et preuve - TD "Logique propositionnelle"
Département "Informatique", ENSEIRB-MATMECA 27 octobre 2025

Voir la page `https://thor.enseirb-matmeca.fr/sites/if107-main/` pour toute information complémentaire sur cet enseignement.

1 Logique propositionnelle

Exercice 1
Indiquer, en justifiant, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. **si** $1 + 1 = 3$ **alors** $1 + 1 = 2$
2. **si** $1 + 1 = 2$ **alors** $1 + 1 = 3$
3. il n'est pas vrai que : **si** $1 + 1 = 3$ **alors** $1 + 1 = 2$
4. $1 + 1 = 3$ **si et seulement si** $3 + 14 = \pi$
5. $-\sqrt{2} > 0$ **si et seulement si** $(-\sqrt{2})^2 > 0^2$
6. un entier naturel est positif **si et seulement si** son carré est positif

Exercice 2
Indiquer pour chaque proposition ci-dessous si elle est valide (V), satisfiable mais non valide (S), ou insatisfiable (I). Justifier.

1. $A \implies B$
2. $A \implies (\neg B \vee \neg C)$
3. $A \implies (A \wedge (B \implies A))$
4. $(A \vee B) \implies B$
5. $(A \vee B) \implies (\neg A \wedge \neg B)$
6. $B \wedge (A \implies B)$
7. $A \implies \neg A$
8. $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

Exercice 3
On considère les propositions : A "il pleut" et B "il y a des nuages". Traduire en français les formules suivantes

1. $\neg A$
2. $\neg\neg B$
3. $A \wedge B$
4. $B \implies A$
5. $A \vee \neg A$
6. $\neg A \wedge B$
7. $\neg(A \wedge B)$
8. $\neg A \wedge \neg B$

Exercice 4

1. Quelle valeur doit prendre A pour que la proposition "$A \implies B$" soit vraie

   a) avec B fausse ?
   b) avec B vraie ?

2. Mêmes questions pour que la proposition "$B \implies A$" soit vraie
3. Comment choisir la proposition B pour que "$A \vee B$" soit une tautologie et "$A \wedge B$" une contradiction ?

Exercice 5
On veut vérifier que la spécification ci-dessous est satisfiable, c'est à dire qu'il est possible de la mettre en œuvre.

Spécifications :

(R1) Si le système de fichier n'est pas verrouillé alors les nouveaux messsages sont mis en attente et transmis au buffer.

(R2) Si le système fonctionne normalement, alors le système de fichier n'est psa vérouillé, et inversement.

(R2) Si les nouveaux messages ne sont pas mis en attente, alors ils ne sont pas transmis au buffer.

(R3) Les nouveaux messages ne sont pas transmis au buffer.

Questions :

1. Traduire les spécifications en logique propositionnelle en utilisant les variables propositionnelles suivantes :
   L "le système de fichier est verrouillé"
   Q "les nouveaux messages sont mis en attente"
   B "les nouveaux messages sont transmis au buffer"
   N "le système fonctionne normalement"
2. Montrer que la spécification est réalisable, en donnant une valuation des variables L, Q, B et N qui safisfait toutes les spécifications.
3. Argumenter sur une possible simplification des spécifications.

Exercice 6

1. Montrer les équivalences suivantes à l'aide des tables de vérité ou par preuve sémantique.

   a) $\neg\neg A \equiv A$
   b) $A \vee B \equiv B \vee A$
   c) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
   d) $A \implies B \equiv \neg A \vee B$
   e) $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \equiv A \wedge (B \vee C)$

2. En déduire les équivalences suivantes :

   a) $A \implies B \equiv \neg B \implies \neg A$
   b) $\neg(A \implies B) \equiv A \wedge \neg B$
   c) $(A \implies B) \wedge (\neg A \implies B) \equiv B$
   d) $(\neg A \implies A) \equiv A$

Exercice 7

Calculer la table de vérité des propositions suivantes, et en déduire des propositions équivalentes sans implication.

1. $A \implies (B \implies C)$
2. $(A \implies B) \implies C$
3. $(A \implies B) \vee (B \implies A)$

Exercice 8

1. Écrire la table de vérité de l'opérateur "ou-exclusif" $A \oplus B$
2. Donner une formule équivalente à "$A \oplus B$" qui n'utilise pas le connecteur "$\oplus$"
3. Le connecteur "$\oplus$" est-il associatif : est-ce que $A \oplus (B \oplus C) \equiv (A \oplus B) \oplus C$? Justifier.

Exercice 9

Il existe exactement deux valuations des variables m, n, p, q, r, s telles que la formules ci-dessous est vraie.

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg s \vee p) \wedge m \wedge \neg n \tag{1}$$

1. Comment le prouver à l'aide d'une table de vérité ? Quelle serait la taille de la table de vérité ?
2. Montrez-le par une preuve sémantique basée sur une disjonction de cas selon la valeur de p

Exercice 10
Il existe en Écosse un club un peu excentrique, dont les membres sont tenus de s'astreindre à suivre rigoureusement les règles suivantes :
— Tout membre non écossais porte des chaussettes rouges.
— Les membres mariés ne sortent pas le dimanche.
— Un membre sort le dimanche si et seulement si il est écossais.
— Tout membre qui porte un kilt est écossais et marié.
— Tout membre qui porte des chaussettes rouges porte également un kilt.
— Tout membre écossais porte un kilt.

1. Prouver les propriétés suivantes :
   a) l'implication est transitive : si $A \implies B$ et $B \implies C$ alors $A \implies C$
   b) $A \implies B \wedge C$ est logiquement équivalente à $(A \implies B) \wedge (A \implies C)$
   c) si $A \iff B$ alors $A \implies B$
   d) $A \iff B$ si et seulement si $\neg A \iff \neg B$
2. Traduire chaque règle du club en utilisant les variables propositionnelles E, R, D, M, K pour représenter respectivement les affirmations : "un membre donné est écossais", "il porte des chaussettes rouges", "il sort le dimanche", "il est marié" et "il porte un kilt".
3. On souhaite montrer que ce club ne peut accueillir aucun membre : ses exigences sont contradictoire. Comment procéder ?

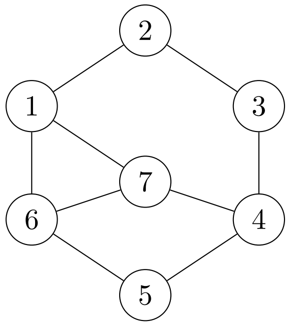
2 Programmation logique

Exercice 11 (★)
Le problème de *coloration de graphe* consiste à déterminer si les sommets d'un graphe peuvent être colorés avec un nombre fixe de couleurs, de manière à ce que les sommets connectés par une arête n'aient pas la même couleur. Ce problème a de nombreuses applications pratiques, par exemple, l'attribution de fréquences radio sans interférence (bornes wifi, etc).

ENTRÉE : un graphe $G = (V, E)$ et un ensemble K de couleurs

QUESTION : existe-t-il une coloration $c : V \to K$ telle que pour toute arête $(n_1, n_2) \in E$, $c(n_1) \neq c(n_2)$?

Considérons par exemple le graphe G_0 ci-dessous :



1. Est-il possible de colorer G_0 avec $K = 2$ couleurs ?
2. Est-il possible de colorer G_0 avec $K = 3$ couleurs ?

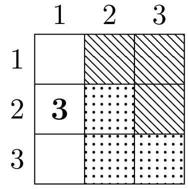
Notre objectif est de calculer, pour un graphe G et un ensemble de K couleurs, une formule de logique propositionnelle $\varphi_{G,K}$ qui est satisfiable si et seulement si G est coloriable avec K couleurs. On pourra alors utiliser un *solveur SAT* pour déterminer si $\varphi_{G,K}$ est satisfiable, et cas échéant, obtenir une valuation qui la satisfait. Celle-ci permet de déduire une coloration de G.

Une coloration associe une couleur aux sommets d'un graphe. On peut la modéliser par un ensemble de variables propositionnelles $p_{n,k}$ avec $n \in V$ et $k \in K$, où la variable $p_{n,k}$ représente la proposition : "le sommet n a la couleur k".

3. Considérons le graphe G_0 ci-dessus, et $K = 3$ couleurs : $\{0, 1, 2\}$. L'ensemble des variables propositionnelles associé à G_0 et K est : $p_{1,0}, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{2,0}, \ldots, p_{7,2}$.
   a) Soit une valuation v telle que $v(p_{1,1}) = 1$ et $v(p_{1,2}) = 1$. Que pouvez-vous dire des couleurs du sommet 1 ?
   b) Prenons maintenant v telle que $v(p_{1,k}) = 0$ pour toute couleur $k \in K$. Que pouvez-vous dire des couleurs du sommet 1 ?
4. Quelles sont les 3 propriétés que doit avoir une valuation v afin de définir une coloration valide ? Justifier.
5. Exprimer ces propriétés par des formules de la logique propositionnelle pour le sous-graphe de G_0 constitué des sommets 1 et 2, et de l'arrête $(1, 2)$. Donner une valuation qui satisfait vos formules, ainsi que la coloration associée.
6. Généraliser ces formules à un graphe G et un ensemble de couleurs K quelconque
7. La formule $\varphi_{G,K}$ est définie comme la conjonction des formules définies à la question précédente. Justifier que $\varphi_{G,K}$ est satisfiable si et seulement si G est coloriable avec K couleurs.

Exercice 12 (★)

On considère un jeu proche du Sudoku représenté ci-dessous. Une solution du jeu attribue à chaque case de la grille un chiffre parmi $\{1, 2, 3\}$ tel que chaque chiffre apparaît de manière unique dans chaque ligne, chaque colonne et chaque bloc coloré.



Le but de cet exercice est de modéliser les solutions du jeu par une formule de *logique propositionnelle* φ qui est *satisfiable si et seulement si le jeu admet une solution*. Nous utilisons pour cela un ensemble de variables propositionnelles p_{ijk} où (i, j) est la coordonnée d'une case de la grille, et k est une valeur parmi $\{1, 2, 3\}$. La variable $p_{i,j,k}$ représente la proposition "la case (i, j) contient la valeur k". Par exemple, $p_{2,1,3}$ indique signifie que la case $(2, 1)$ contient la valeur 3 (comme sur la figure ci-dessus).

Une valuation associe une valeur dans $\{0, 1\}$ à chaque variable $p_{i,j,k}$. Si $v(p_{i,j,k}) = 1$ alors la valuation v place la valeur k dans la case (i, j). Inversement, si $v(p_{i,j,k}) = 0$, la valuation v ne donne pas la valeur k à la case (i, j). Une solution du jeu correspond donc à une valuation qui place une valeur dans chaque case qui tient compte des contraintes d'unicité. Notons qu'une valuation v, solution de la grille ci-dessus, fixe nécessairement $v(p_{2,1,3}) = 1$.

1. Écrire une formule de logique propositionnelle qui exprime ≪ s'il y a 1 en case $(1, 1)$, il n'y a pas 1 en case $(1, 2)$, ni en case $(1, 3)$ ≫.
2. Généraliser la formule précédente à : ≪ s'il y a k en case (i, j), alors il n'y a pas k dans les cases de l'ensemble C ≫. On écrira $\bigwedge_{(x,y)\in C} \cdots$ pour quantifier sur toutes les cases de C (c'est à dire pour écrire ≪ pour toute case (x, y) de C ... ≫). NB : on supposera que $(i, j) \notin C$ pour cette question.
3. On note $\varphi_{i,j,k,C}$ la formule obtenue à la question précédente. À l'aide de $\varphi_{i,j,k,C}$ écrire une formule qui exprime : ≪ la valeur k apparaît au plus une fois dans l'ensemble de cases C ≫.
4. On note $\varphi_{k,C}$ la formule obtenue à la question précédente. À l'aide de $\varphi_{k,C}$ écrire une formule qui exprime : ≪ chaque valeur $k \in \{1, 2, 3\}$ apparaît au plus une fois dans l'ensemble de cases C ≫.
5. On note φ_C la formule obtenue à la question précédente. Écrire une formule qui exprime les contraintes d'unicité sur les lignes, les colonnes et les blocs de la grille en utilisant φ_C. On notera L_1, L_2 et L_3 les ensembles de cases correspondant aux lignes, C_1, C_2 et C_3 ceux correspondant aux colonnes, et B_1, B_2 et B_3 ceux correspondant aux blocs colorés.
6. Expliquez pourquoi une valuation v qui satisfait les formules obtenues à la question précédente ne correspond pas nécessairement à une solution du jeu. Comment résoudre ce problème ?
7. On fixe usuellement la valeur de certaines cases, comme la case $(2, 1)$ dans la grille ci-dessus. Comment ces valeurs fixées peuvent-elles être prises en compte ?
8. Décrire en 2 à 3 lignes un algorithme pour déterminer si le jeu admet une solution à partir de la formule φ obtenue depuis vos réponses aux questions précédentes.
9. Supposons qu'un algorithme fournit une solution s au jeu à partir de φ. Comment utiliser cet algorithme pour vérifier si s est l'unique solution du jeu ?
10. Supposons connue une solution du jeu. Donner un algorithme qui permet de construire une grille à trous qui possède une unique solution.

3 Formes normales et SAT

Exercice 13
On nomme φ la formule $(p \wedge \neg q) \iff (\neg q \implies (p \vee r))$.

1. Mettre φ sous forme normale négative en utilisation les règles d'équivalence du cours.
2. Mettre φ sous forme normale disjonctive en utilisant les règles d'équivalence vues en cours.
3. Mettre φ sous forme normale conjonctive en utilisant les règles d'équivalence vues en cours.
4. Donner un algorithme qui détermine si une formule φ en forme normale disjonctive est satisfiable. Quelle est la complexité de votre algorithme ?

Exercice 14

Soit φ la formule : $(p \implies q \vee \neg r) \wedge (p \wedge q \implies \neg r)$.

1. Calculer une formule FND équivalente à φ à partir de sa table de vérité.
2. À partir de la table de vérité de φ, calculer une formule FNC équivalente à φ.