

Voir la page <https://thor.enseirb-matmeca.fr/sites/if107-main/> pour toute information complémentaire sur cet enseignement.

1 Logique propositionnelle

Exercice 1

Indiquer, en justifiant, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. **si** $1 + 1 = 3$ **alors** $1 + 1 = 2$
2. **si** $1 + 1 = 2$ **alors** $1 + 1 = 3$
3. il n'est pas vrai que : **si** $1 + 1 = 3$ **alors** $1 + 1 = 2$
4. $1 + 1 = 3$ **si et seulement si** $3 + 14 = \pi$
5. $-\sqrt{2} > 0$ **si et seulement si** $(-\sqrt{2})^2 > 0^2$
6. un entier naturel est positif **si et seulement si** son carré est positif

Exercice 2

Indiquer pour chaque proposition ci-dessous si elle est valide (V), satisfiable mais non valide (S), ou insatisfiable (I). Justifier.

- | | |
|---|---|
| 1. $A \implies B$ | 4. $(A \vee B) \implies B$ |
| 2. $A \implies (\neg B \vee \neg C)$ | 5. $(A \vee B) \implies (\neg A \wedge \neg B)$ |
| 3. $A \implies (A \wedge (B \implies A))$ | 6. $B \wedge (A \implies B)$ |

Exercice 3

1. On considère les propositions : A "il pleut" et B "il y a des nuages". Traduire en français les formules suivantes

- | | | | |
|-----------------|-------------------|----------------------|---------------------------|
| a) $\neg A$ | c) $A \wedge B$ | e) $A \vee \neg A$ | g) $\neg(A \wedge B)$ |
| b) $\neg\neg B$ | d) $B \implies A$ | f) $\neg A \wedge B$ | h) $\neg A \wedge \neg B$ |

2. Simplifier les énoncés ci-dessous :

- a) il n'est pas vrai que "s'il pleut, il y a des nuages"
- b) il n'est pas vrai que "il pleut si et seulement s'il y a des nuages"
- c) il n'est pas vrai que "s'il n'y a pas de nuages, il pleut"

Exercice 4

1. Quelle valeur doit prendre A pour que la proposition " $A \implies B$ " soit vraie

- a) avec B fausse?
- b) avec B vraie?

2. Mêmes questions pour que la proposition " $B \implies A$ " soit vraie

3. Comment choisir la proposition B pour que " $A \vee B$ " soit une tautologie et " $A \wedge B$ " une contradiction ?

Exercice 5

On veut vérifier que la spécification ci-dessous est satisfiable, c'est à dire qu'il est possible de la mettre en œuvre.

Spécifications :

- (R1) Si le système de fichier n'est pas verrouillé alors
- (R1.1) les nouveaux messages sont mis en attente
 - (R1.2) les nouveaux messages sont transmis au buffer
 - (R1.3) le système fonctionne normalement, et inversement, si le système ne fonctionne pas normalement, le système de fichier n'est pas verrouillé
- (R2) Si les nouveaux messages ne sont pas mis en attente, alors ils ne sont pas transmis au buffer
- (R3) Les nouveaux messages ne sont pas transmis au buffer

Questions :

- Traduire les spécifications en logique propositionnelle en utilisant les variables propositionnelles suivantes :
 - L "le système de fichier est verrouillé"
 - Q "les nouveaux messages sont mis en attente"
 - B "les nouveaux messages sont transmis au buffer"
 - N "le système fonctionne normalement"
- Montrer que la spécification est réalisable, en donnant une valuation des variables L , Q , B et N qui satisfait toutes les spécifications.
- Argumenter sur une possible simplification des spécifications.

Exercice 6

- Montrer les équivalences suivantes à l'aide des tables de vérité.

- | | |
|---|--|
| a) $\neg\neg A \equiv A$ | d) $A \implies B \equiv \neg A \vee B$ |
| b) $A \vee B \equiv B \vee A$ | e) $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \equiv A \wedge (B \vee C)$ |
| c) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ | |

- En déduire les équivalences suivantes :

- | | |
|---|---|
| a) $A \implies B \equiv \neg B \implies \neg A$ | c) $(A \implies B) \wedge (\neg A \implies B) \equiv B$ |
| b) $\neg(A \implies B) \equiv A \wedge \neg B$ | d) $(\neg A \implies A) \equiv A$ |

Exercice 7

Calculer la table de vérité des propositions suivantes, et en déduire des propositions équivalentes sans implication.

$$1. A \implies (B \implies C)$$

$$2. (A \implies B) \implies C$$

$$3. (A \implies B) \vee (B \implies A)$$

Exercice 8

1. Écrire la table de vérité de l'opérateur "ou-exclusif" $A \oplus B$

2. Donner une formule équivalente à " $A \oplus B$ " qui n'utilise pas le connecteur " $\oplus$ "

3. Le connecteur " $\oplus$ " est-il associatif : est-ce que $A \oplus (B \oplus C) \equiv (A \oplus B) \oplus C$? Justifier.

Exercice 9

Il existe exactement deux valuations des variables m, n, p, q, r, s telles que la formule ci-dessous est vraie.

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg s \vee p) \wedge m \wedge \neg n \quad (1)$$

1. Comment le prouver à l'aide d'une table de vérité? Quelle serait la taille de la table de vérité?

2. Montrez-le par une preuve sémantique basée sur une disjonction de cas selon la valeur de p

2 Logique des prédicats

Exercice 10

Indiquer la valeur de vérité des propriétés suivantes, et écrire leur négation.

$$1. \forall x \in \mathbb{R}, (x > 3 \wedge x \leq -2)$$

$$2. \exists x, y, w \in \mathbb{R}, (x > y + z \wedge x - y \neq y - z \wedge -1 \leq z \leq 2)$$

$$3. \forall a \in \mathbb{N}, \exists b, c \in \mathbb{N}, (a = bc)$$

$$4. \forall a, b \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{N}, (a = bc)$$

$$5. \exists a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{N}. (a = bc)$$

$$6. \forall a, b \in \mathbb{R}, (a < b \implies \exists q \in \mathbb{Q}, a < q < b)$$

Exercice 11

Écrire la négation des propositions suivantes :

1. Toutes les voitures de course sont rouges

2. Il existe un arbre dont les feuilles sont vertes

3. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < q < \epsilon$

4. Dans toutes les filières d'enseignement, il existe un élève qui aime tous les cours

Exercice 12

1. Donner un exemple simple d'ensemble E et d'interprétation des prédicats P et Q tels que les propositions ci-dessous soient toutes les deux vraies :

$$\exists x \in E, \neg P(x) \quad (2)$$

$$\exists x \in E, (P(x) \wedge \neg Q(x)) \quad (3)$$

2. Pour toute interprétation (E, P, Q) vérifiant (2) et (3), donner en justifiant, la valeur de vérité des deux propositions suivantes :

- a) $(\forall x \in E, P(x)) \implies (\forall x \in E, Q(x))$
- b) $\forall x \in E, (P(x) \implies Q(x))$

Exercice 13

On considère des tableaux t, t_1 , et t_2 d'entiers à $N \in \mathbb{N}$ éléments. On note $t[i]$ l'élément d'indice i dans t avec $0 \leq i < N$. Écrire les propositions suivantes en logique des prédicats.

1. le tableau t représente la fonction $x \mapsto x^2$ pour x entier tel que $0 \leq x < N$
2. le tableau t est trié par ordre croissant
3. les valeurs du tableau t sont majorées par M
4. M est le maximum des valeurs du tableau t
5. la valeur x apparaît pour la première fois en position p dans le tableau t (on supposera $0 \leq p < N$)
6. les tableaux t_1 et t_2 contiennent les mêmes éléments et dans le même ordre
7. les tableaux t_1 et t_2 contiennent les mêmes éléments (on supposera que les éléments ne se répètent pas)
8. tout élément de t_1 est plus grand qu'un élément de t_2
9. tout élément de t_1 est la somme de deux éléments distincts de t_2

3 Programmation logique

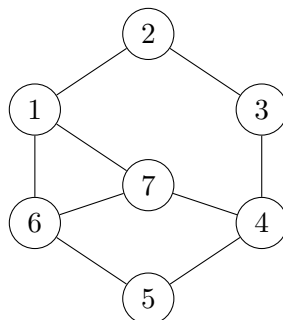
Exercice 14

Le problème de *coloration de graphe* consiste à déterminer si les sommets d'un graphe peuvent être colorés avec un nombre fixe de couleurs, de manière à ce que les sommets connectés par une arête n'aient pas la même couleur. Ce problème a de nombreuses applications pratiques, par exemple, l'attribution de fréquences radio sans interférence (bornes wifi, etc).

ENTRÉE : un graphe $G = (V, E)$ et un ensemble K de couleurs

QUESTION : existe-t-il une coloration $c : V \rightarrow K$ telle que pour toute arête $(n_1, n_2) \in E$, $c(n_1) \neq c(n_2)$?

Considérons par exemple le graphe G_0 ci-dessous :



1. Est-il possible de colorer G_0 avec $K = 2$ couleurs ?

2. Est-il possible de colorer G_0 avec $K = 3$ couleurs ?

Notre objectif est de calculer, pour un graphe G et un ensemble de K couleurs, une formule de logique propositionnelle $\Phi_{G,K}$ qui est satisfiable si et seulement si G est coloriable avec K couleurs. On pourra alors utiliser un *solveur SAT* pour déterminer si $\Phi_{G,K}$ est satisfiable, et cas échéant, obtenir une valuation qui la satisfait. Celle-ci permet de déduire une coloration de G .

Une coloration associe une couleur aux sommets d'un graphe. On peut la modéliser par un ensemble de variables propositionnelles $p_{n,k}$ avec $n \in V$ et $k \in K$, où la variable $p_{n,k}$ représente l'information : "le sommet n a la couleur k ".

3. Considérons le graphe G_0 ci-dessus, et $K = 3$ couleurs : $\{0, 1, 2\}$. L'ensemble des variables propositionnelles associé à G_0 et K est : $p_{1,0}, p_{1,1}, p_{1,2}, p_{2,0}, \dots, p_{7,2}$.

a) Soit une valuation v telle que $v(p_{1,1}) = 1$ et $v(p_{1,2}) = 1$. Que pouvez-vous dire des couleurs du sommet 1 ?

b) Prenons maintenant v telle que $v(p_{1,k}) = 0$ pour toute couleur $k \in K$. Que pouvez-vous dire des couleurs du sommet 1 ?

4. Quelles sont les 3 propriétés que doit avoir une valuation v afin de définir une coloration valide ? Justifier.

5. Exprimer ces propriétés par des formules de la logique propositionnelle pour le sous-graphe de G_0 constitué des sommets 1 et 2, et de l'arrête $(1, 2)$. Donner une valuation qui satisfait vos formules, ainsi que la coloration associée.

6. Généraliser ces formules à un graphe G et un ensemble de couleurs K quelconque

7. La formule $\Phi_{G,K}$ est définie comme la conjonction des formules définies à la question précédente. Justifier que $\Phi_{G,K}$ est satisfiable si et seulement si G est coloriable avec K couleurs.

Exercice 15

On considère un jeu proche du Sudoku représenté ci-dessous. Une solution du jeu attribue à chaque case de la grille un chiffre parmi $\{1, 2, 3\}$ tel que chaque chiffre apparaît de manière unique dans chaque ligne, chaque colonne et chaque bloc coloré.

	1	2	3
1			
2	3		
3			

Le but de cet exercice est de modéliser les solutions du jeu par une formule de *logique propositionnelle* ϕ qui est *satisfaisable si et seulement si le jeu admet une solution*. Nous utilisons pour cela un ensemble de variables propositionnelles $p_{i,j,k}$ où (i, j) est la coordonnée d'une case de la grille, et k est une valeur parmi $\{1, 2, 3\}$. La variable $p_{i,j,k}$ représente l'information "la case (i, j) contient la valeur k ". Par exemple, $p_{2,1,3}$ indique signifie que la case $(2, 1)$ contient la valeur 3.

Une valuation associe une valeur dans $\{0, 1\}$ à chaque variable $p_{i,j,k}$. Si $v(p_{i,j,k}) = 1$ alors la valuation v place la valeur k dans la case (i, j) . Inversement, si $v(p_{i,j,k}) = 0$, la valuation v ne donne pas la valeur k à la case (i, j) . Une solution du jeu correspond donc à une valuation

qui place une valeur dans chaque case qui tient compte des contraintes d'unicité. Notons qu'une valuation v , solution de la grille ci-dessus, fixe nécessairement $v(p_{2,1,3}) = 1$.

1. Écrire une formule de logique propositionnelle qui exprime « s'il y a 1 en case $(1, 1)$, il n'y a pas 1 en case $(1, 2)$, ni en case $(1, 3)$ ».
2. Généraliser la formule précédente à : « s'il y a k en case (i, j) , alors il n'y a pas k dans les cases de l'ensemble C ». On écrira $\bigwedge_{(x,y) \in C} \dots$ pour quantifier sur toutes les cases de C (c'est à dire pour écrire « pour toute case (x, y) de $C \dots$ »). NB : on supposera que $(i, j) \notin C$ pour cette question.
3. On note $\phi_{i,j,k,C}$ la formule obtenue à la question précédente. À l'aide de $\phi_{i,j,k,C}$ écrire une formule qui exprime : « la valeur k apparaît au plus une fois dans l'ensemble de cases C ».
4. On note $\phi_{k,C}$ la formule obtenue à la question précédente. À l'aide de $\phi_{k,C}$ écrire une formule qui exprime : « chaque valeur $k \in \{1, 2, 3\}$ apparaît au plus une fois dans l'ensemble de cases C ».
5. On note ϕ_C la formule obtenue à la question précédente. Écrire une formule qui exprime les contraintes d'unicité sur les lignes, les colonnes et les blocs de la grille en utilisant ϕ_C . On notera L_1, L_2 et L_3 les ensembles de cases correspondant aux lignes, C_1, C_2 et C_3 ceux correspondant aux colonnes, et B_1, B_2 et B_3 ceux correspondant aux blocs colorés.
6. Expliquez pourquoi une valuation v qui satisfait les formules obtenues à la question précédente ne correspond pas nécessairement à une solution du jeu. Comment résoudre ce problème ?
7. On fixe usuellement la valeur de certaines cases, comme la case $(2, 1)$ dans la grille ci-dessus. Comment ces valeurs fixées peuvent-elles être prises en compte ?
8. Décrire en 2 à 3 lignes un algorithme pour déterminer si le jeu admet une solution à partir de la formule ϕ obtenue depuis vos réponses aux questions précédentes.
9. Supposons qu'un algorithme fournit une solution s au jeu à partir de ϕ . Comment utiliser cet algorithme pour vérifier si s est l'unique solution du jeu ?
10. Supposons connue une solution du jeu. Donner un algorithme qui permet de construire une grille à trous qui possède une unique solution.

4 Formes normales et SAT

Exercice 16

On nomme Φ la formule $(p \wedge \neg q) \iff (\neg q \implies (p \vee r))$.

1. Mettre Φ sous forme normale disjonctive en utilisant les règles d'équivalence vues en cours.
2. Mettre Φ sous forme normale conjonctive en utilisant les règles d'équivalence vues en cours.
3. Donner un algorithme qui détermine si une formule Φ en forme normale disjonctive est satisfiable. Quelle est la complexité de votre algorithme ?