IF107 Logique et preuve - TD ”Machines à états et invariants”
Département “Informatique”, ENSEIRB-MATMECA 29 novembre 2024

Voir la page `https://thor.enseirb-matmeca.fr/sites/if107-main/` pour toute information complémentaire sur cet enseignement.

Exercice 1
On dispose d'un sac contenant des balles bleues et des balles rouges. On peut effectuer les actions suivantes *tant qu'il y a plus de balles bleues que de balles rouges* :

(A1) Ajouter une balle rouge

(A2) Retirer une balle bleue

(A3) Ajouter une balle bleue et deux balles rouges

(A4) Retirer deux balles bleues et une balle rouge

On note b et r les nombres de balles bleues et rouges respectivement dans le sac.

1. Définir la machine à états du jeu à partir d'une configuration initiale (b_0, r_0) quelconque.
2. Supposons que le sac contiennent initialement 10 balles rouges et 16 balles bleues. Quel est le nombre maximal N de balles qu'il peut contenir ? Démonter que N est bien le maximum.
3. Montrer que $Q(b, r) \triangleq$ “$b - r \geq 0$” est un invariant inductif du système pour toute configuration initiale (b_0, r_0) telle que $b_0 \geq r_0$.
4. Montrer que pour toute configuration initiale (b_0, r_0), appliquer répétitivement les règles (A1)-(A4) dans un ordre quelconque conduit inévitablement à une configuration où aucune règle ne peut plus être appliquée (indication : ensembles bien ordonnés).

Exercice 2 (Inspiré du film “Die Hard 3”)
Soit deux cruches non graduées initialement vides et de capacités respectives 3 litres et 6 litres.

Trois actions sonts possibles :
- remplissage d'une cruche à la fontaine ;
- vidage d'une cruche dans la fontaine ;
- transvasage d'une cruche dans l'autre jusqu'à ce que l'une soit pleine ou l'autre soit vide.

On note a et b les volumes d'eau dans la petite cruche et la grande cruche respectivement.

1. Définir la machine à états $M = (S, \mathsf{Init}, \mathsf{Next})$ du système
2. Le prédicat $P(a, b) \triangleq$ “$a \neq 4$ et $b \neq 4$” est-il un invariant inductif du système ?
3. Montrer que le prédicat $Q(a, b) \triangleq$ “a et b sont des multiples de 3” est un invariant inductif du système.
4. En déduire qu'il n'est pas possible de remplir l'une des cruche avec exactement 4 litres.

Exercice 3 (Jeu de Taquin)
Le jeu du Taquin consiste en une grille de taille 4×4 contenant les nombres de 1 à 15 ainsi qu'une case vide. La figure ci-dessous à gauche représente la configuration initiale du jeu. La figure ci-dessous à droite est la configuration finale que l'on souhaite obtenir.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Configuration initiale

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	

Configuration finale

Une action de jeu consiste à échanger la case vide avec l'une de ses cases adjacentes. Par exemple, dans la grille à gauche ci-dessous, la case vide peut être échangée avec les cases contenant 2, 6, 9 ou 5. La case ci-dessous à droite montre la grille obtenue après échange de la case vide avec celle contenant 9. Il est alors possible d'échanger la case vide avec celles contenant 9, 10, 13 ou 8.

1	2	3	4
5		6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	9	6	7
8		10	11
12	13	14	15

1. Définir la machine à états qui modélise le jeu de Taquin.
2. Combien d'états possède-t-elle ?

L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il n'est pas possible d'obtenir la configuration finale ci-dessous à partir de la configuration initiale.

Une grille peut être représentée par un triplet (L, i, j) où L est la liste des valeurs de la grille lues de gauche à droite et de haut en bas, et (i, j) est la coordonnée de la case vide.

3. Donner les représentations (L, i, j) des quatres grilles ci-dessus.

Soit L une liste d'entiers positifs. Une paire x, y d'éléments de L est *désordonnée* si $x > y$ et x est avant y dans L. Par exemple, la liste $[1, 2, 4, 5, 3]$ a deux paires désordonnées : $4, 3$ d'une part, et $5, 3$ d'autre part. Une configuration (L, i, j) est *paire* si la somme de i et du nombre de paires désordonnées de L est paire. Elle est impaire sinon.

4. En vous basant sur la transition représentée ci-dessus, indiquer le nombre de paires de pièces dont l'ordre est modifié lorsque la case vide se déplace verticalement.
5. Montrer que le prédicat $P(L, i, j) \triangleq$ "(L, i, j) est paire$''$ est un invariant inductif.
6. En déduire que la configuration finale n'est pas accessible depuis la configuration initiale.