IF107 Logique et preuve - TD "Techniques de preuve"
Département "Informatique", ENSEIRB-MATMECA 8 novembre 2024

Voir la page `https://thor.enseirb-matmeca.fr/sites/if107-main/` pour toute information complémentaire sur cet enseignement.

Exercice 1 (Raisonnement direct)
Montrer les propositions suivantes à l'aide d'un raisonnement direct :

1. La somme de deux rationnels est un rationnel.
2. Le carré d'un entier impair est un entier impair.
3. Si n est un entier pair et m est un entier impair, alors $n + m$ est un entier impair.

Exercice 2 (Raisonnement par disjonction de cas)
Montrer les deux propositions suivantes à l'aide d'un raisonnement par disjonction de cas.

1. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$
2. Considérons deux personnes quelconques : soit elles se sont déjà rencontrées, soit elles ne sont jamais rencontrées. Si toutes les paires de personnes d'un groupe se sont déjà rencontrées, ce groupe s'appelle un *club*. Inversement, si toutes les personnes d'un groupe prises deux à deux ne se sont jamais rencontrées, il s'agit d'un *groupes d'étrangers*.

   Démontrer la proposition ci-dessous (Indication : étudier la situation d'une des 6 personnes vis-à-vis de 3 autres personnes du groupe).

   "Tout groupe de 6 personnes contient un club de 3 personnes ou un groupe de 3 étrangers"
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|x + 1| = 3 - |3x - 2|$.

Exercice 3 (Preuve par contraposée)
Montrer les deux propositions suivantes à l'aide d'un raisonnement par contraposée :

1. Si r est irrationnel, $\sqrt{r}$ est également irrationnel
2. Si n^2 est un multiple de 3, alors n est un multiple de 3 (indication : utiliser en plus une disjonction de cas)
3. Soit m et n deux entiers impairs. Si m ne divise pas n, alors m ne divise pas $2n$.

Exercice 4 (Preuve d'équivalence)
Montrer les propositions ci-dessous.

1. Soient deux ensembles A et B, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (indication : deux ensembles E et F sont égaux si pour tout élément x, $x \in E$ ssi $x \in F$)
2. La *déviation standard* d'une séquence de valeurs $x_1, \ldots, x_n$ est définie par :

$$\sqrt{\frac{(x_1 - \mu)^2 + \cdots + (x_n - \mu)^2}{n}} \tag{1}$$

   où $\mu = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ est la moyenne des valeurs.

   Montrer que "la déviation standard est nulle si et seulement si chacune des valeurs est égale à la moyenne" (indication : chaînage d'équivalences).

3. Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2$ (indication : chaînage d'équivalences).

Exercice 5 (Preuve par contradiction)
Montrer les trois propositions ci-dessous par contradiction :

1. Si $a \cdot b = n$, alors $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$ où a, b et n sont des nombres réels non négatifs.
2. Pour tout entier $n > 0$ et pour tout entier a, si a^n est pair, alors a est pair (indication : utiliser le développement du binôme de Newton : $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$ avec $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$).
3. $\log_4(6)$ est irrationnel (indication : on rappelle que $4^{\log_4(6)} = 6$).

Exercice 6 (Une preuve par l'absurde plus poussée)
On veut montrer que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas. On procède par l'absurde : on suppose qu'il existe, et notons le E.
On pose $A = \{x \in E \,|\, x \notin x\}$.

1. Expliquez avec des mots en quoi consiste l'ensemble A
2. Montrer qu'on a l'équivalence "$A \in A$ si et seulement si $A \notin A$"
3. En déduire que E n'existe pas

Exercice 7 (Un raisonnement érroné)
Considérons le raisonnement suivant :

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

1. Identifier l'erreur dans ce raisonnement erroné
2. Montrer (de façon correcte) que si $1 = -1$ alors $2 = 1$
3. Tout nombre réel positif possède deux racines carrées : l'une positive, l'autre négative. Par convention, $\sqrt{r}$ représente la racine positive de r. Montrer que pour tous nombres réels positifs r et s, $\sqrt{rs} = \sqrt{r} \cdot \sqrt{s}$

Exercice 8 (Un autre raisonnement faux, dû à Ionesco)
Que pensez vous de la démonstration suivante ?
— Tous les chats sont mortels.
— Socrate est mortel.
— Donc Socrate est un chat.
(indication : formaliser les énoncés à l'aide de prédicats)