

ERI5-IFON1 - Logique propositionnelle

Frédéric Herbreteau (`frederic.herbreteau@bordeaux-inp.fr`)

14 septembre 2026

Logique et vérité

Ces **propositions** sont-elles vraies ou fausses ?

1. $1 + 1 = 0$?
2. les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ont le même cardinal ?
3. il existe des triangles dont la somme des angles n'est pas 180 degrés ?

Chaque proposition peut être **vraie** ou **fausse**

Logique et vérité

Ces **propositions** sont-elles vraies ou fausses ?

1. $1 + 1 = 0$?
2. les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ont le même cardinal ?
3. il existe des triangles dont la somme des angles n'est pas 180 degrés ?

Chaque proposition peut être **vraie** ou **fausse**

- **Vraie** dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mais **fausse** dans $\mathbb{N}$

Logique et vérité

Ces **propositions** sont-elles vraies ou fausses ?

1. $1 + 1 = 0$?
2. les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ont le même cardinal ?
3. il existe des triangles dont la somme des angles n'est pas 180 degrés ?

Chaque proposition peut être **vraie** ou **fausse**

- ▶ **Vraie** dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mais **fausse** dans $\mathbb{N}$
- ▶ **Vraie** : il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Logique et vérité

Ces **propositions** sont-elles vraies ou fausses ?

1. $1 + 1 = 0$?
2. les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ont le même cardinal ?
3. il existe des triangles dont la somme des angles n'est pas 180 degrés ?

Chaque proposition peut être **vraie** ou **fausse**

- ▶ **Vraie** dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mais **fausse** dans $\mathbb{N}$
- ▶ **Vraie** : il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$
- ▶ **Fausse** en géométrie Euclidienne, **vraie** en géométrie elliptique

Logique et vérité

Ces **propositions** sont-elles vraies ou fausses ?

1. $1 + 1 = 0$?
2. les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ont le même cardinal ?
3. il existe des triangles dont la somme des angles n'est pas 180 degrés ?

Chaque proposition peut être **vraie** ou **fausse**

- ▶ **Vraie** dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mais **fausse** dans $\mathbb{N}$
- ▶ **Vraie** : il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$
- ▶ **Fausse** en géométrie Euclidienne, **vraie** en géométrie elliptique

La logique a pour propos la **vérité** et le **raisonnement**

Langage naturel vs. formel

Le langage naturel et le langage formel sont **complémentaires** :

langage naturel : richesse, polysémie (ambiguïté)

langage formel : rigueur, syntaxe/sémantique définies
mathématiquement, preuve

Exemple

“Fromage **ou** dessert ?” (exclusif ou non)

► *fromage* $\vee$ *dessert*

► *fromage* $\oplus$ *dessert*

Raisonnement logique informel

Exemple

1. Si le train arrive en retard et s'il n'y a pas de taxis à la gare, alors l'invité arrive en retard.
2. L'invité n'est pas en retard.
3. Le train est arrivé en retard.

Donc : il y avait des taxis

Question : comment déduire qu'il y avait des taxis à la gare ?

Formalisation du raisonnement

La formalisation permet le **raisonnement**, la manipulation **algorithmique** des connaissances.

Formalisation des énoncés :

p : "le train arrive en retard" q : "il y a des taxis à la gare" r : "l'invité est en retard"

1. Si le train arrive en retard et s'il n'y a pas de taxis à la gare, alors l'invité arrive en retard : $p \wedge \neg q \implies r$
2. L'invité n'est pas en retard : $\neg r$
3. Le train est arrivé en retard : p

Question : comment déduire qu'il y avait des taxis à la gare ?

par (1) : $\neg r \implies \neg p \vee q$ (contraposée)

par (2) : $\neg p \vee q$

par (3) : q

Syntaxe

Propositions

Proposition : assertion qui est **soit vraie, soit fausse**

Exemple

- ▶ "il y a des taxis à la gare",
- ▶ "il pleut"
- ▶ "les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ont le même cardinal"
- ▶ "il existe des triangles dont la somme des angles n'est pas 180 degrés"

Les propositions sont représentées par des **variables propositionnelles** : $p, q, r, A, B, C, \dots$

Formules

Soit $P = \{p, p', q, q', \dots\}$ un ensemble de variables propositionnelles (qui représentent donc des propositions).

Définition 2.1 Une formule de la logique propositionnelle est formée en combinant les variables propositionnelles en appliquant (un nombre fini de fois) les règles suivantes :

1. tout symbole de P est une formule
2. si ϕ est une formule, alors $\neg\phi$ et (ϕ) sont également des formules
3. si ϕ et ψ sont des formules, alors $\phi \implies \psi$ (implication), $\phi \wedge \psi$ (et), $\phi \vee \psi$ (ou) et $\phi \iff \psi$ (équivalence) sont des formules ♦

Exemple

► q

► $\neg p \vee q$

► $\neg r \implies \neg p \vee q$

Notations supplémentaires

Une formule est un énoncé **fini**

On pourra généraliser $\bigvee_{e \in E}$ et $\bigwedge_{e \in E}$ à condition que E soit un ensemble fini

Exemple

- ▶ $p_1 \wedge \cdots \wedge p_n$ n'est **pas** une formule
- ▶ $\bigvee_{k \in \{1,2,3\}} (p_k \wedge \neg q_k)$ est la formule $(p_1 \wedge \neg q_1) \vee (p_2 \wedge \neg q_2) \vee (p_3 \wedge \neg q_3)$
- ▶ $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} p_n$ n'est **pas** une formule
- ▶ $\bigvee_{k \in [1;n]} p_k$ est une formule pour toute valeur de n

Priorité, associativité, commutativité

Par ordre **décroissant de priorité** :

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \begin{matrix} \Longrightarrow \\ \Longleftarrow \end{matrix}$$

Exemple

► $p \wedge q \vee r$ se lit $(p \wedge q) \vee r$

► $\neg p \vee q \Longrightarrow r$ se lit $((\neg p) \vee q) \Longrightarrow r$.

1. Distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$: $\phi \wedge (\psi \vee \psi')$ équivaut à $\phi \wedge \psi \vee \phi \wedge \psi'$
2. Distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$: $\phi \vee (\psi \wedge \psi')$ équivaut à $(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \psi')$
3. Associativité de $\wedge$: $\phi \wedge (\psi \wedge \psi')$ équivaut à $(\phi \wedge \psi) \wedge \psi'$
4. Associativité de $\vee$: $\phi \vee (\psi \vee \psi')$ équivaut à $(\phi \vee \psi) \vee \psi'$
5. Commutativité de $\wedge$: $\phi \wedge \psi$ équivaut à $\psi \wedge \phi$
6. Commutativité de $\vee$: $\phi \vee \psi$ équivaut à $\psi \vee \phi$
7. Commutativité de $\Longleftrightarrow$: $\phi \Longleftrightarrow \psi$ équivaut à $\psi \Longleftrightarrow \phi$
8. Attention cependant, l'implication $\Longrightarrow$ n'est pas commutative : $p \Longrightarrow q$ et $q \Longrightarrow p$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 1

En notant m , c et a les trois affirmations suivantes :

- ▶ m : « Pierre fait des maths »
- ▶ c : « Pierre fait de la chimie »
- ▶ a : « Pierre fait de l'anglais »

Formaliser les affirmations qui suivent à l'aide des variables propositionnelles m , c et a et des connecteurs usuels :

1. Pierre fait des maths et de l'anglais mais pas de chimie
2. Pierre fait des maths et de la chimie mais pas à la fois de la chimie et de l'anglais
3. Il est faux que Pierre fasse de l'anglais sans faire de maths
4. Il est faux que Pierre ne fasse pas des maths et fasse quand même de la chimie
5. Il est faux que Pierre fasse de l'anglais ou de la chimie sans faire des maths
6. Pierre ne fait ni anglais ni chimie mais il fait des maths

Sémantique

Sémantique des connecteurs

Tables de vérité :

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \implies q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \iff q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exercice 2

Répondre aux questions suivantes en considérant vraie l'affirmation "les personnes qui ont des chats ont également des chiens".

1. Si une personne n'a pas de chien, peut-on en déduire qu'elle n'a pas de chat ?
2. Si une personne n'a pas de chat, peut-on en déduire qu'elle n'a pas de chien ?
3. Les phrases suivantes sont-elles équivalentes à l'affirmation ci-dessus ? Lesquelles sont équivalentes entre elles ?
 - 3.1 "les personnes qui n'ont pas de chat, n'ont pas non plus de chiens"
 - 3.2 "les personnes qui n'ont pas de chien, n'ont pas non plus de chat"
 - 3.3 "les personnes qui ont des chiens ont également des chats"
4. Traduire ces 4 affirmations en logique propositionnelle en utilisant les propositions $a\text{-chat}$ et $a\text{-chien}$

Sémantique des formules

La **valeur** d'une formule dépend de la **valuation** des variables propositionnelles

Exemple :

formule $\Phi : \neg r \implies \neg p \vee q$

valuation $v : r \mapsto 0, p \mapsto 1, q \mapsto 1$

$$\neg 0 \implies \neg 1 \vee 1$$

$$[\Phi]_v =$$

Satisfiabilité, validité

Définition 2.6 Une formule ϕ est :

- *satisfaisable* s'il existe une valuation v telle que $[\phi]_v = 1$
- *valide* si $[\phi]_v = 1$ pour tout valuation v (on dit également que ϕ est une *tautologie*)
- *insatisfaisable* si $[\phi]_v = 0$ pour toute valuation v .



Problème SAT :

ENTREE : une formule Φ de la logique propositionnelle

QUESTION : Φ est-elle satisfaisable ?

Théorème 2.1 Le problème de satisfaisabilité de la logique propositionnelle est décidable. ♦

- ▶ il suffit d'énumérer toutes les valuations
- ▶ complexité ?
- ▶ lien entre satisfiabilité et validité ?

Exercice 3

Pour les formules suivantes :

- ▶ introduire les parenthèses en respectant la priorité des opérateurs,
- ▶ calculer la table de vérité et indiquer si la formule est satisfaisable et si elle est valide

1. $p \wedge q \vee r$

2. $p \implies q \implies p$

3. $p \wedge \neg q \wedge r$

4. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r)$

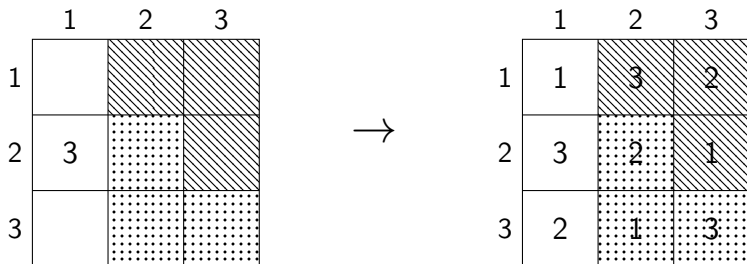
Exercice 4

Vous arrivez à une bifurcation dans un désert. Chacune des pistes peut soit conduire à une oasis, soit s'enfoncer dans le désert. Vous disposez des informations suivantes :

- A. "Une au moins des deux pistes conduit à une oasis"
 - B. "La piste de droite se perd dans le désert"
 - C. Soit (A) et (B) vraies toutes les deux, soit elles sont fausses toutes les deux
-
- 1. Soit (D) : "Il y a une oasis au bout de la route droite" et soit (G) : "Il y a une oasis au bout de la route gauche". Exprimer les affirmations A, B et C en logique propositionnelle.
 - 2. Construire les tables de vérité de ces formules.
 - 3. Répondre aux questions suivantes à l'aide des tables de vérité.
 - 3.1 peut-il y avoir deux oasis ?
 - 3.2 les affirmations (A) et (B) sont-elles toutes les deux fausses ?
 - 3.3 peut-il avoir une oasis à droite ?
 - 3.4 y-a-t'il une oasis à gauche ?

Problème 1 : modélisation et résolution de Sudoku

Sudoku



- ▶ Remplir chaque case avec un chiffre parmi $\{1, 2, 3\}$
- ▶ De telle sorte que chaque chiffre apparaisse une **unique fois**
 - ▶ dans chaque ligne,
 - ▶ dans chaque colonne,
 - ▶ et dans chaque zone colorée

Réduction à SAT

	1	2	3
1			
2	3		
3			

Existence d'un remplissage **correct** R de la grille G ?

↓ **réduction**

Formule Φ_G de la logique propositionnelle
tq

Il existe un remplissage correct R ssi Φ_G est satisfiable

+ Utiliser un solveur SAT pour déterminer si Φ_G est satisfaisable

Modélisation

Chaque chiffre apparaisse une **unique fois**

- ▶ dans chaque ligne,
- ▶ dans chaque colonne,
- ▶ et dans chaque zone colorée

Contraintes sur le **contenu k de chaque case (i, j)**

Variables propositionnelles :

p_{ijk} **modélise** “la case (i, j) contient la valeur k ”

avec $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$

Contraintes exclusives

À l'aide des variables propositionnelles p_{ijk} :

1. Écrire une formule de logique propositionnelle qui exprime « s'il y a 1 en case (1, 1), il n'y a pas 1 en case (1, 2), ni en case (1, 3) ».
2. Généraliser la formule précédente à : « s'il y a k en case (i, j) , alors il n'y a pas k dans les cases de l'ensemble C ».

On écrira $\bigwedge_{(i',j') \in C} \dots$ pour quantifier sur toutes les cases de C (c'est à dire pour écrire « pour toute case (i', j') de C ... »).

Contraintes d'unicité

Soit $\Phi_{i,j,k,C}$ la formule qui exprime « s'il y a k en case (i,j) , alors il n'y a pas k dans les cases de l'ensemble C ».

3. Écrire une formule $\phi_{k,C}$ qui exprime : « la valeur k apparaît au plus une fois dans l'ensemble de cases C ».
4. Écrire une formule ϕ_C qui exprime : « chaque valeur $k \in \{1, 2, 3\}$ apparaît au plus une fois dans l'ensemble de cases C ».
5. Écrire une formule ϕ_U qui exprime les contraintes d'unicité sur les lignes, les colonnes et les blocs de la grille en utilisant ϕ_C . On notera L_1, L_2 et L_3 les ensembles de cases correspondant aux lignes, C_1, C_2 et C_3 ceux correspondant aux colonnes, et B_1, B_2 et B_3 ceux correspondant aux blocs colorés.

Contraintes de remplissage

6. Pourquoi une valuation qui satisfait ϕ_U ne correspond pas toujours à un remplissage valide de la grille ?
7. Quelle formule ϕ_R faut-il ajouter à ϕ_U pour résoudre ce problème ?
8. On fixe usuellement la valeur de certaines cases, comme la case $(2, 1)$ dans la grille précédente. Comment modéliser ces valeurs fixées ?
9. Supposons qu'un algorithme fournit un remplissage valide r de G à partir de ϕ_G . Comment utiliser cet algorithme pour vérifier si r est l'unique solution de G ?

Implication et raisonnement

Équivalence logique

Définition 2.5 Deux formules ϕ et ψ sont (*logiquement*) *équivalentes* si elles ont même fonction caractéristique, c'est à dire si $[\phi]_v = [\psi]_v$ pour toute valuation v . ♦

Principales équivalences logiques :

- $\neg\neg\phi$ équivaut à ϕ
- $\phi \implies \psi$ équivaut à $\neg\phi \vee \psi$
- $\phi \iff \psi$ équivaut à $(\phi \implies \psi) \wedge (\psi \implies \phi)$
- $\phi \vee \psi$ équivaut à $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$
- $\phi \wedge \psi$ équivaut à $\neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$

Les deux dernières équivalences constituent les lois de « de Morgan ».

Exemple : montrer que $(\phi \implies \psi) \equiv (\neg\psi \implies \neg\phi)$

Exercice 5

1. Démontrer les équivalences suivantes :

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

$$A \implies B \equiv \neg A \vee B$$

$$A \iff B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

$$A \implies B \not\equiv B \implies A$$

2. Donner une formule équivalente à $A \implies B \implies C$ qui n'utilise pas l'implication
3. Indiquer comment réduire un problème d'équivalence logique $\Phi \equiv \Psi$ comme ci-dessus à un problème de satisfiabilité
4. Représenter l'implication $A \implies B$ d'un point de vue ensembliste. Comment démontrer l'égalité de deux ensembles ?

Raisonnement basé sur l'implication

Modus ponens

$$\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$$

Modus tollens

$$\frac{A \Rightarrow B \quad \neg B}{\neg A}$$

Exercice 6 :

1. démontrer la règle du modus tollens à l'aide du modus ponens
2. formaliser les raisonnements suivants à l'aide des règles ci-dessus. Lesquels sont corrects ?

Un oiseau vole

- 2.1 Titi est un oiseau, donc titi vole
- 2.2 Gros Minet n'est pas un oiseau, donc Gros Minet ne vole pas
- 2.3 Gros Minet ne vole pas, donc Gros Minet n'est pas un oiseau

Transitivité de l'implication

$$\frac{A \implies B \quad B \implies C}{A \implies C}$$

Exercice 7 : Sorites de Lewis Carroll

Soient les trois phrases suivantes :

1. Tout logicien aime les écrits de Lewis Carroll.
2. Les personnes qui aiment les écrits de Lewis Carroll aiment les carottes.
3. Les personnes qui aiment les carottes sont aimables.

► Formaliser ces énoncés à l'aide des propositions :

- l : logicien
- e : aime les écrits de Lewis Carroll
- c : aime les carottes
- a : aimable

► Quelles est la conclusion de ce raisonnement ?

Exercice 8

Soient les 5 phrases suivantes :

1. Quand je résous un exercice de logique sans grogner, vous pouvez être sûr que c'en est un que je comprends.
 2. Ces sorites ne sont pas présentés comme les exercices auxquels je suis habitué.
 3. Aucun exercice facile ne me donne mal à la tête.
 4. Je ne comprends pas les exercices qui ne sont pas présentés comme ceux auxquels je suis habitué.
 5. Je ne grogne jamais devant un exercice à moins qu'il ne me donne mal à la tête.
- Formaliser ces énoncés à l'aide des propositions suivantes :
- g : exercice que je résous en grogant
 - c : exercice que je comprends
 - s : sorite
 - h : exercice auquel je suis habitué
 - f : exercice facile
 - t : exercice qui me donne mal à la tête
- Dédisez-en la conclusion de ce raisonnement en justifiant.

Preuve par l'absurde

$$\frac{\neg A \implies \text{faux}}{A}$$

Exercice 9 :

1. Montrer que si on range $n + 1$ chaussettes dans $m < n$ tiroirs, alors au moins l'un des tiroirs contient 2 chaussettes ou plus (principe de Dirichlet)
2. Montrer que « $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal »
3. Soient x et y deux réels positifs. Montrer que « si $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x}$ alors $x = y$ »