**MA122 "Logique et mathématiques discrètes" - partie Logique**
F. Herbreteau — Session 1, 29 novembre 2024

**NOM :**
**PRENOM :**

# 1 Techniques de preuve

**Exercice 1** Soit $n$ un entier naturel non nul. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $[0,1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$.

On veut démontrer par l'absurde la propriété $P$ suivante :

$P$ : deux de ces réels sont distants d'au plus $\frac{1}{n}$

1. Écrire à l'aide de quantificateurs et des variables $x_i$, une formule de la logique des prédicats qui exprime la propriété $P$.

   $\exists i.(1 \leq i \leq n \wedge x_i - x_{i-1} \leq 1/n)$

2. Écrire la négation de cette formule logique (NB : on ne demande pas d'ajouter le symbole de négation $\neg$ devant la formule précédente)

   $\forall i.(1 \leq i \leq n \implies x_i - x_i - 1 > 1/n)$

3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété $P$.

   On prouve la propriété P par l'absurde.
   Supposons donc que P est fausse, c'est à dire : $\forall i.(1 \leq i \leq n \implies x_i - x_{i-1} > 1/n)$
   Alors, $(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + ... + (x_n - x_{n-1}) > n * 1/n$
   Donc $x_n - x_0 > 1$
   Contradiction : $x_n$ et $x_0$ appartiennent à $[0,1]$, donc $x_n - x_0 \leq 1$

   **Commentaire ne faisant pas partie de la preuve :** Intuitivement, les $n+1$ points $x_0, \dots, x_n$ découpent l'intervalle $[0,1]$ en $n$ sous-intervalles. Si aucun de ces sous-intervalles n'est plus petit que $1/n$, alors la somme des longueurs de ces sous-intervalles est supérieure à 1, ce qui est impossible.

**Exercice 2** Un nombre entier $a$ divise un nombre entier $b$, noté $a|b$, si $b$ est un multiple de $a$ (il existe un entier $k$ tel que $b = k \cdot a$). Par exemple $3|(4^3 - 4)$ car $4^3 - 4 = 60$ est un multiple de $3$.

Montrer par récurrence que "$3|(n^3 - n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$"

> Soit $P(n)$ le prédicat "$3|(n^3 - n)$" où $n$ est un entier naturel
> On montre que $P(n)$ est vrai par récurrence pour tout entier naturel $n$
>
> **Base** Pour $n = 0$, on a $3|(0^3 - 0)$ car $0$ est un multiple de $3$
>
> **Induction** Soit $k$ un entier naturel quelconque. On suppose que $P(k)$ est vrai, c'est à dire $3|(k^3 - k)$ (hypothèse de récurrence)
> On montre que $P(k + 1)$ est vraie :
>
> $$\begin{aligned}(k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3k^2 + 2k \\ &= (k^3 - k) + 3(k^2 + k)\end{aligned}$$
>
> Or par hypothèse de récurrence, $3|(k^3 - k)$, donc $3|((k + 1)^3 - (k + 1))$
> On en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$

## 2 Logique propositionnelle

**Exercice 3**

1. Montrer la transitivité de l'implication, c'est à dire que la proposition "si $p \implies q$ et $q \implies r$ alors $p \implies r$" est valide

   > Soit $v$ une valuation telle que $p \implies q$ et $q \implies r$ sont vraies.
   > — si $v(p) = 0$, alors $p \implies r$ est également vraie
   > — sinon, $v(p) = 1$. Alors, puisque $p \implies q$ est vraie, $v(q) = 1$. Donc, puisque $q \implies r$ est vraie, $v(r) = 1$. On en déduit que $p \implies r$ est vraie

2. Formaliser les énoncés si-dessous sous la forme d'implications en utilisant les variables propositionnelles suivantes : $(d)$ "être un dogue", $(c)$ "être un chien", $(m)$ "être un mammifère" et $(p)$ "être un poisson"

   a) tous les dogues sont des chiens
   b) tous les chiens sont des mammifères
   c) aucun poisson est un mammifère

a) $d \implies c$

b) $c \implies m$

c) $p \implies \neg m$

3. Que pouvez-vous déduire des formules précédentes en utilisant les propriétés de l'implication (transitivité, etc) ? Justifier.

Par contraposition, $p \implies \neg m$ est logiquement équivalente à $m \implies \neg p$. On a donc :
— $d \implies m$ par (1)+(2)
— $c \implies \neg p$ par (2)+ contraposée de (3)
— $d \implies \neg p$ par transitivité de (1), (2) et contraposé de (3)

## 3 Logique des prédicats

**Exercice 4** Formaliser les énoncés ci-dessous en utilisant les prédicats suivants :
— $P(x)$ : "$x$ est un philosophe"
— $Cite(x, y)$ : "$x$ cite $y$"
— $Ecrit(x, y)$ : "$x$ a écrit $y$"

1. $x$ cite $y$ qui est un philosophe et qui a écrit $z$
2. $x$ cite un philosophe
3. quelqu'un se cite lui-même
4. il existe un philosophe qui n'a rien écrit
5. quelqu'un cite un philosophe qui n'a rien écrit
6. tout le monde cite un philosophe
7. quelqu'un cite tout le monde
8. quelqu'un cite tous ceux qui ne se citent pas

1. $P(y) \wedge Ecrit(y, z) \wedge Cite(x, y)$
2. $\exists y.(P(y) \wedge Cite(x, y))$
3. $\exists x.Cite(x, x)$
4. $\exists y.(P(y) \wedge \forall z.\neg Ecrit(y, z))$
5. $\exists x.\exists y.(P(x) \wedge P(y) \wedge Cite(x, y) \wedge \forall z.\neg Ecrit(y, z))$
6. $\forall x.\exists y.(P(y) \wedge Cite(x, y))$
7. $\exists x.\forall y.Cite(x, y)$
8. $\exists x.\forall y.(P(y) \wedge \neg Cite(y, y) \implies Cite(x, y))$