

Voir la page <https://thor.enseirb-matmeca.fr/sites/ma122-main/> pour toute information complémentaire sur cet enseignement.

1 Preuves par récurrence simples

Exercice 1

1. Montrer par induction que tout ensemble fini non vide de nombres réels possède un élément minimal.
2. Cette propriété est-elle vraie pour les ensembles infinis de nombres réels ?

Exercice 2

Un nombre entier a divise un nombre entier b , noté $a|b$, si b est un multiple de a (il existe un entier k tel que $b = k \cdot a$). Par exemple $3|(4^3 - 4)$ car $4^3 - 4 = 60$ est un multiple de 3.

Montrer par induction que " $3|(n^3 - n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ "

Exercice 3

La suite de Fibonacci est définie par :

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1}$.

Exercice 4

Montrer par récurrence sur n la loi de distribution de l'intersection sur une union de n ensembles :

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i)$$

2 Preuves par récurrence élaborées

Exercice 5

Lors de la construction du bâtiment de Bordeaux INP, il a été prévu de paver le patio et de placer une statue du directeur en son centre. La figure 1 (gauche) montre un patio constitué d'une grille de taille $2^n \times 2^n$. La statue peut être placée sur l'une des cases grisées. Pour des questions esthétiques, l'architecte du bâtiment a choisi de paver le patio avec des dalles en forme de "L" comme sur la figure 1 (droite). L'objectif est donc de paver la grille avec des tuiles en "L", tout en laissant une case vide pour la statue.

1. Montrer un pavage pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ avec l'une des cases centrales vide.
2. Montrer par récurrence sur n entier naturel, qu'il existe un pavage avec l'une des cases centrales vide, pour toute grille de taille $2^n \times 2^n$.

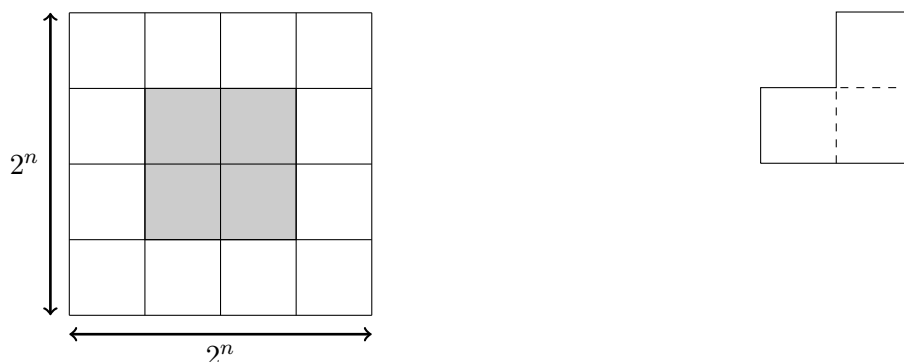


FIGURE 1 – Un patio de taille $2^n \times 2^n$ pour $n = 2$ avec les cases centrales en gris (à gauche), et une tuile en forme de “L” (à droite)

Exercice 6

Attention, les preuves par induction peuvent sembler simples, mais elles sont parfois piégeuses. Voici une “preuve fausse”, à vous de trouver l’erreur.

$P(n)$: “dans tout ensemble de n chevaux, tous les chevaux ont la même couleur”

On prouve que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par induction sur n .

Base : $P(0)$ est vraie, puisque tous les chevaux d’un ensemble vide de chevaux ont la même couleur

Induction : Soit k un entier naturel quelconque. Supposons que $P(k)$ est vraie. On considère un ensemble de $k + 1$ chevaux : $\{c_1, c_2, \dots, c_k, c_{k+1}\}$. On prouve que $P(k + 1)$ est également vraie.

Considérons les k premiers chevaux :

$$\underbrace{c_1, c_2, \dots, c_k}_{\text{même couleur}} c_{k+1} \quad (1)$$

Par hypothèse d’induction, tous ces chevaux ont la même couleur.

Considérons maintenant les k derniers chevaux :

$$c_1 \underbrace{c_2, \dots, c_k, c_{k+1}}_{\text{même couleur}} \quad (2)$$

Par hypothèse d’induction, tous ces chevaux ont la même couleur.

Ainsi donc, c_1 a la même couleur que $c_2, \dots, c_k$ et donc également que c_{k+1} . On en déduit que $P(k + 1)$ est vraie.

Exercice 7

On considère une monnaie constituée de deux pièces, l’une de valeur 3 et l’autre de valeur 5. Certaines petites valeurs, comme 4 et 7 ne peuvent pas être payées avec ces pièces. Montrer par récurrence forte que toute somme d’une valeur supérieure ou égale à 8 peut être décomposée en somme de 3 et 5, en utilisant l’hypothèse d’induction :

$P(n)$: “ $n + 8$ peut être décomposée en une somme de 3 et de 5”

Exercice 8

Le jeu débute avec une pile de n boîtes. À chaque tour de jeu, on divise une pile de hauteur $n_1 + n_2$ en deux piles de hauteurs n_1 et n_2 telles que $n_1, n_2 \geq 1$. Cette division rapporte $n_1 n_2$ points. Le jeu s'arrête lorsque l'on a n piles de hauteur 1. Le score est alors la somme des points obtenus à chaque division.

Démontrer par induction forte que le score final est $n(n-1)/2$ quelle que soit la stratégie utilisée.

3 Preuves par induction structurelle

Exercice 9

L'ensemble des listes d'entiers est récursivement définie par :

Base : $\langle \rangle$ est la liste vide

Induction : si l est une liste et n un entier, alors $\langle n, l \rangle$ est une liste

On définit l'inverse d'une liste comme étant la liste lue de droite à gauche : $rev(\langle a, \langle b, \langle c, \langle \rangle \rangle \rangle) = \langle c, \langle b, \langle a, \langle \rangle \rangle \rangle$ (c'est à dire $rev(abc) = cba$). On rappelle que $l_1 \cdot l_2$ est la concaténation de listes définie en cours.

1. Montrer par induction structurelle que pour toute liste l : " $l = l \cdot \langle \rangle$ ".
2. Définir la fonction récursive rev sur le type liste.
3. Prouver par induction structurelle que pour toutes listes l_1 et l_2 , $rev(l_1 \cdot l_2) = rev(l_2) \cdot rev(l_1)$.

Exercice 10

L'ensemble des formules propositionnelles est défini par :

Base : toute variable propositionnelle p est une formule

Induction : si F et G sont deux formules, alors $\neg F, F \wedge G, F \vee G, F \implies G$ et $F \iff G$ sont des formules.

Une valuation v associe à chaque variable propositionnelle p une valeur $v(p) \in \{0, 1\}$. Étant donnée une valuation v , on note $v[x \mapsto c]$ la valuation qui donne la même valeur que v à toutes les variables, sauf x qui a la valeur c .

Soit $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ et les opérateurs définis par :

- $\bar{0} = 1$ et $\bar{1} = 0$
- $0 + 0 = 0$ et $0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 1$
- $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ et $1 \cdot 1 = 1$

1. Définir la fonction récursive $eval(F, v)$ qui calcule la valeur de la formule F dans la valuation v .
2. Définir la fonction récursive $subst(F, x, G)$ qui substitue la formule G à chaque occurrence de la variable x dans la formule F .
3. Montrer par induction structurelle que $eval(subst(F, x, G), v) = eval(F, v[x \mapsto eval(G, v)])$, c'est à dire que la valeur de F dans laquelle on substitue G aux occurrences de x , est égale à la valeur de F évaluée en prenant la valeur de G pour x .

Exercice 11

On définit l'ensemble des arbres binaires par :

Base : `Empty` est un arbre binaire

Induction : si g, d sont des arbres binaires et n est un entier, alors $\text{Node}(n, g, d)$ est un arbre binaire

1. Définir la fonction récursive *nnodes* qui calcule le nombre de nœuds d'un arbre binaire
2. Définir la fonction récursive *nvides* qui calcule le nombre de `Empty` dans un arbre binaire
3. Prouver par induction structurelle que pour tout arbre binaire a , $nvides(a) = nnodes(a) + 1$
4. Définir la fonction récursive *height* qui calcule la hauteur d'un arbre binaire (la longueur de sa plus longue branche)
5. Prouver par induction structurelle que pour tout arbre binaire a , $nnodes(a) \leq 2^{height(a)} - 1$