

MA122 Logique et mathématiques discrètes - TD "Logique"

Département "Réseaux et informatique", ENSEIRB-MATMECA 19 septembre 2024

Voir la page <https://thor.enseirb-matmeca.fr/sites/ma122-main/> pour toute information complémentaire sur cet enseignement.

Exercice 1

Indiquer, en justifiant, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. **si** $1 + 1 = 3$ **alors** $1 + 1 = 2$
2. **si** $1 + 1 = 2$ **alors** $1 + 1 = 3$
3. il n'est pas vrai que : **si** $1 + 1 = 3$ **alors** $1 + 1 = 2$
4. $1 + 1 = 3$ **si et seulement si** $3 + 14 = \pi$
5. $-\sqrt{2} > 0$ **si et seulement si** $(-\sqrt{2})^2 > 0^2$
6. un entier naturel est positif **si et seulement si** son carré est positif

Exercice 2

Indiquer pour chaque proposition ci-dessous si elle est valide (V), satisfiable mais non valide (S), ou insatisfiable (I). Justifier.

- | | |
|---|---|
| 1. $A \implies B$ | 4. $(A \vee B) \implies B$ |
| 2. $A \implies (\neg B \vee \neg C)$ | 5. $(A \vee B) \implies (\neg A \wedge \neg B)$ |
| 3. $A \implies (A \wedge (B \implies A))$ | 6. $B \wedge (A \implies B)$ |

Exercice 3

1. On considère les propositions : A "il pleut" et B "il y a des nuages". Traduire en français les formules suivantes

- | | | | |
|-----------------|-------------------|----------------------|---------------------------|
| a) $\neg A$ | c) $A \wedge B$ | e) $A \vee \neg A$ | g) $\neg(A \wedge B)$ |
| b) $\neg\neg B$ | d) $B \implies A$ | f) $\neg A \wedge B$ | h) $\neg A \wedge \neg B$ |

2. Simplifier les énoncés ci-dessous :

- a) il n'est pas vrai que "s'il pleut, il y a des nuages"
- b) il n'est pas vrai que "il pleut si et seulement s'il y a des nuages"
- c) il n'est pas vrai que "s'il n'y a pas de nuages, il pleut"

Exercice 4

1. Quelle valeur doit prendre A pour que la proposition " $A \implies B$ " soit vraie

- a) avec B fausse?
- b) avec B vraie?

2. Mêmes questions pour que la proposition " $B \implies A$ " soit vraie

3. Comment choisir la proposition B pour que " $A \vee B$ " soit une tautologie et " $A \wedge B$ " une contradiction?

Exercice 5

On veut vérifier que la spécification ci-dessous est satisfiable, c'est à dire qu'il est possible de la mettre en œuvre.

Spécifications :

- (R1) Si le système de fichier n'est pas verrouillé alors
 - (R1.1) les nouveaux messages sont mis en attente
 - (R1.2) les nouveaux messages sont transmis au buffer
 - (R1.3) le système fonctionne normalement, et inversement, si le système ne fonctionne pas normalement, le système de fichier n'est pas verrouillé
- (R2) Si les nouveaux messages ne sont pas mis en attente, alors ils ne sont pas transmis au buffer
- (R3) Les nouveaux messages ne sont pas transmis au buffer

Questions :

1. Traduire les spécifications en logique propositionnelle en utilisant les variables propositionnelles suivantes :
 - L "le système de fichier est verrouillé"
 - Q "les nouveaux messages sont mis en attente"
 - B "les nouveaux messages sont transmis au buffer"
 - N "le système fonctionne normalement"
2. Montrer que la spécification est réalisable, en donnant une valuation des variables L , Q , B et N qui satisfait toutes les spécifications.
3. Argumenter sur une possible simplification des spécifications.

Exercice 6

1. Montrer les équivalences suivantes à l'aide des tables de vérité.

- | | |
|---|--|
| a) $\neg\neg A \equiv A$ | d) $A \implies B \equiv \neg A \vee B$ |
| b) $A \vee B \equiv B \vee A$ | e) $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \equiv A \wedge (B \vee C)$ |
| c) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ | |

2. En déduire les équivalences suivantes :

- | | |
|---|---|
| a) $A \implies B \equiv \neg B \implies \neg A$ | c) $(A \implies B) \wedge (\neg A \implies B) \equiv B$ |
| b) $\neg(A \implies B) \equiv A \wedge \neg B$ | d) $(\neg A \implies A) \equiv A$ |

Exercice 7

Calculer la table de vérité des propositions suivantes, et en déduire des propositions équivalentes sans implication.

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1. $A \implies (B \implies C)$ | 3. $(A \implies B) \vee (B \implies A)$ |
| 2. $(A \implies B) \implies C$ | |

Exercice 8

1. Écrire la table de vérité de l'opérateur "ou-exclusif" $A \oplus B$
2. Donner une formule équivalente à " $A \oplus B$ " qui n'utilise pas le connecteur " $\oplus$ "

3. Le connecteur “ $\oplus$ ” est-il associatif : est-ce que $A \oplus (B \oplus C) \equiv (A \oplus B) \oplus C$? Justifier.

Exercice 9

Il existe exactement deux valuations des variables m, n, p, q, r, s telles que la formule ci-dessous est vraie.

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg s \vee p) \wedge m \wedge \neg n \quad (1)$$

1. Comment le prouver à l’aide d’une table de vérité ? Quelle serait la taille de la table de vérité ?
2. Montrez-le par une preuve sémantique basée sur une disjonction de cas selon la valeur de p

Exercice 10

Indiquer la valeur de vérité des propriétés suivantes, et écrire leur négation.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 3 \wedge x \leq -2)$
2. $\exists x, y, w \in \mathbb{R}, (x > y + z \wedge x - y \neq y - z \wedge -1 \leq z \leq 2)$
3. $\forall a \in \mathbb{N}, \exists b, c \in \mathbb{N}, (a = bc)$
4. $\forall a, b \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{N}, (a = bc)$
5. $\exists a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{N}, (a = bc)$
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a < b \implies \exists q \in \mathbb{Q}, a < q < b)$

Exercice 11

Écrire la négation des propositions suivantes :

1. Toutes les voitures de course sont rouges
2. Il existe un arbre dont les feuilles sont vertes
3. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < q < \epsilon$
4. Dans toutes les filières d’enseignement, il existe un élève qui aime tous les cours

Exercice 12

1. Donner un exemple simple d’ensemble E et d’interprétation des prédicats P et Q tels que les propositions ci-dessous soient toutes les deux vraies :

$$\exists x \in E, \neg P(x) \quad (2)$$

$$\exists x \in E, (P(x) \wedge \neg Q(x)) \quad (3)$$

2. Pour toute interprétation (E, P, Q) vérifiant (2) et (3), donner en justifiant, la valeur de vérité des deux propositions suivantes :
 - a) $(\forall x \in E, P(x)) \implies (\forall x \in E, Q(x))$
 - b) $\forall x \in E, (P(x) \implies Q(x))$

Exercice 13

On considère des tableaux t, t_1 , et t_2 d’entiers à $N \in \mathbb{N}$ éléments. On note $t[i]$ l’élément d’indice i dans t avec $0 \leq i < N$. Écrire les propositions suivantes en logique des prédicats.

1. le tableau t représente la fonction $x \mapsto x^2$ pour x entier tel que $0 \leq x < N$

2. le tableau t est trié par ordre croissant
3. les valeurs du tableau t sont majorées par M
4. M est le maximum des valeurs du tableau t
5. la valeur x apparaît pour la première fois en position p dans le tableau t (on supposera $0 \leq p < N$)
6. les tableaux t_1 et t_2 contiennent les mêmes éléments et dans le même ordre
7. les tableaux t_1 et t_2 contiennent les mêmes éléments (on supposera que les éléments ne se répètent pas)
8. tout élément de t_1 est plus grand qu'un élément de t_2
9. tout élément de t_1 est la somme de deux éléments distincts de t_2